Libros de Cátedra

Ecuaciones Diferenciales en Física

Carlos M. Naón
Raúl D. Rossignoli
Eve M. Santangelo

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

e
exactas



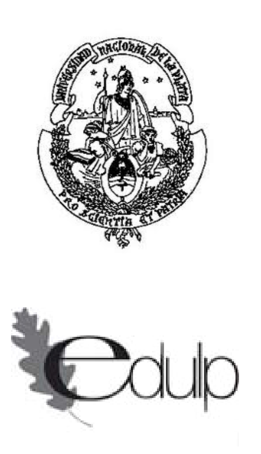


ECUACIONES DIFERENCIALES EN FÍSICA

Carlos María Naón

Raúl Dante Rossignoli

Eve Mariel Santangelo



2014

Naón, Carlos M.

Ecuaciones diferenciales en física / Carlos M. Naón ; Raúl D. Rossignoli ; Eve M. Santangelo. – 1a ed. - La Plata: Universidad Nacional de La Plata, 2014.

E-Book. ISBN 978-950-34-1074-5

1. Ecuaciones Diferenciales. 2. Física. 3. Enseñanza Universitaria. I. Rossignoli, Raúl D. II. Santangelo, Eve M. III. Título

CDD 515.350 711

Fecha de catalogación: 08/04/2014

Diseño de tapa: Dirección de Comunicación Visual de la UNLP





Universidad Nacional de La Plata – Editorial de la Universidad de La Plata

47 N.º 380 / La Plata B1900AJP / Buenos Aires, Argentina
+54 221 427 3992 / 427 4898
editorial@editorial.unlp.edu.ar
www.editorial.unlp.edu.ar

Edulp integra la Red de Editoriales Universitarias Nacionales (REUN)

Primera edición, 2014
ISBN 978-950-34-1074-5

Dedicatoria

En recuerdo del Profesor Carlos Guido Bollini, cuyos Apuntes de Matemáticas Especiales II [1] enseñaron a tantas generaciones de físicos – entre los cuales nos contamos los autores del presente libro – la teoría de las ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.

Agradecimientos

A nuestras familias, que nos alentaron a escribir este libro y nos tuvieron tanta paciencia mientras lo hacíamos.

A nuestros profesores, colegas y alumnos del Departamento de Física y del Instituto de Física La Plata, que enriquecieron el contenido de esta obra con sus enseñanzas, preguntas y sugerencias.

A la Universidad Nacional de La Plata, al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, y a la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires, que nos proveyeron la infraestructura y el apoyo financiero indispensables para la realización, entre otros, del presente proyecto.

Prólogo

Como su título lo indica, este libro está pensado como texto básico para un primer curso, de duración semestral, sobre Ecuaciones Diferenciales. Aunque algunos de sus contenidos se han tomado de las Refs. [1–10], contiene numerosos aportes propios. En efecto, está basado en los apuntes de clase que los autores elaboramos durante los diversos períodos en que tuvimos a cargo la asignatura Matemáticas Especiales II, correspondiente al tercer año de la carrera de Licenciatura en Física de la Universidad Nacional de La Plata. Por consiguiente, pone énfasis en aquellos aspectos que son de utilidad en la modelización y resolución de problemas que plantea dicha disciplina científica. Por esta razón, entendemos que puede resultar igualmente útil para cursos destinados a alumnos/as de otras disciplinas directamente relacionadas con la Física, como la Ingeniería, las Ciencias Astronómicas y Geofísicas. Al escribirlo, hemos dado por descontado que su lector/a ha adquirido, previamente, una formación básica sobre Análisis Matemático en una y varias variables reales y en variable compleja, así como sobre Álgebra y Álgebra Lineal.

Convencidos de que no se puede comprender profundamente la Física sin abordar seriamente el estudio de su principal herramienta, la Matemática, hemos cuidado al máximo la rigurosidad. Por esa causa, damos la demostración de cada aseveración que la requiere, con la sola excepción de aquellos temas que corresponden a los contenidos de asignaturas previas de Matemática o que se demuestran más naturalmente con herramientas que se obtendrán en cursos posteriores.

El libro contiene numerosos ejemplos resueltos, destinados a consolidar la comprensión de los tópicos desarrollados, junto con 52 figuras ilustrativas. Incluye, también, un buen número de ejercicios propuestos. Algunos de ellos apuntan a desarrollar en el/la estudiante la capacidad de resolver ecuaciones diferenciales. Otros, están destinados a profundizar su dominio de la estructura matemática asociada con el tema.

El breve capítulo I contiene las definiciones básicas e introduce las propiedades fundamentales de las ecuaciones diferenciales lineales. El capítulo II se dedica al estudio de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones ordinarias, con énfasis en la resolución de problemas de condiciones iniciales. En la sección II.1 de este capítulo, se detallan las propiedades generales de este tipo de ecuaciones. En la sección II.2 se enumeran técnicas que permiten resolver algunos casos de fácil resolución, En la sección II.3 se presentan las generalidades de los problemas de condiciones iniciales, incluyendo el teorema de existencia y unicidad de la solución (de Picard) para sistemas de primer orden con condiciones iniciales. También se considera la reducción de problemas de condiciones iniciales para ecuaciones diferenciales de órdenes superiores a problemas de condiciones iniciales para sistemas de primer orden. En la sección II.4 se estudia, en particular, el caso de problemas iniciales para sistemas de ecuaciones ordinarias lineales de primer orden, poniendo especial énfasis en las técnicas basadas en el uso de la matriz fundamental (para sistemas lineales homogéneos) y de la matriz de Green causal (para sistemas lineales inhomogéneos). En la sección II.5 se aborda el estudio de ecuaciones diferenciales lineales

de órdenes superiores con técnicas que no requieren su reducción a sistemas de ecuaciones de primer orden. Finalmente, la sección II.6 contiene una breve introducción a la Teoría de Distribuciones y aplicaciones de tales conceptos a la definición de matrices y funciones de Green causales.

El capítulo III está reservado al estudio de problemas de condiciones de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias. En la sección III.1 de este capítulo, se estudian los problemas de Sturm-Liouville, tanto con coeficientes analíticos como con coeficientes singulares, los tipos de condiciones de contorno compatibles con el carácter autoadjunto del correspondiente operador diferencial de segundo orden, los autovalores y autofunciones de operadores de Sturm-Liouville, las correspondientes funciones de Green y sus desarrollos en autofunciones. En la sección III.2 se presenta la técnica de resolución de ecuaciones lineales homogéneas mediante desarrollos en series de potencias, se introducen las funciones especiales de uso más frecuente en Física y se examinan sus principales propiedades.

En el capítulo IV se estudian la serie de Fourier y algunas transformadas integrales. La sección IV.1 está dedicada a la presentación de la serie de Fourier en sus diversas variantes. En la sección IV.2 se presenta la transformada integral de Fourier y se demuestran sus principales propiedades. Finalmente, en la sección IV.3 se aborda el estudio de la transformada integral de Laplace.

En el capítulo V se consideran las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Luego de dar una breve introducción al problema (sección V.1), se aborda la clasificación de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes (sección V.2). En la sección V.3 se presenta el método de separación de variables, que se utilizará a menudo en las secciones posteriores. La sección V.4 se dedica al estudio de la ecuación de propagación de ondas en una dimensión espacial, paradigma de las ecuaciones diferenciales lineales hiperbólicas. En la sección V.5 se realiza el estudio de la ecuación de difusión en una dimensión espacial, ejemplo principal de las ecuaciones diferenciales lineales parabólicas. La sección V.6 está reservada al estudio de la ecuación de Laplace, arquetipo de las ecuaciones diferenciales lineales elípticas y, sin duda, una de las ecuaciones de más frecuente aparición en el planteo matemático de problemas de la Física. En la sección V.7 se utilizan los conocimientos adquiridos en la sección anterior para resolver ecuaciones hiperbólicas y parabólicas en más de una dimensión espacial.

Finalmente, hemos querido terminar este libro, en el capítulo VI, con una presentación detallada de cómo el Principio de Hamilton, que desempeña un papel preponderante en la Física, conduce a la obtención de ecuaciones diferenciales ordinarias, en el caso de sistemas con un número finito de grados de libertad (sección VI.1), y de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, en el caso de sistemas continuos (sección VI.2).

Los tres apéndices contienen material complementario.

Índice general

Capítulo I

Introducción

I.1. Consideraciones generales

Al estudiar fenómenos físicos, en general, se encuentran leyes que no vinculan entre sí a las magnitudes que caracterizan el fenómeno, sino que involucran relaciones entre esas magnitudes y sus derivadas. Así, se obtienen ecuaciones que contienen no sólo la función incógnita (escalar o vectorial) sino, además, una o más derivadas de la misma. Tales ecuaciones se llaman ecuaciones diferenciales, y su estudio será el objetivo principal de este libro.

Un ejemplo básico es la ley de desintegración radiactiva. Se sabe que el número de núcleos atómicos dN que decaen en un intervalo de tiempo pequeño dt es proporcional al número de núcleos presentes $N(t)$. Este hecho conduce a la relación

$$\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t)\,, \tag{I.1.1}$$

con k constante, que es una ecuación diferencial para $N(t)$.

El segundo ejemplo que podemos mencionar es la Segunda ley de Newton para una partícula de masa constante m que se mueve en una dimensión espacial bajo la acción de una fuerza F. Si x denota la posición de la partícula y la fuerza F depende del tiempo t, de la posición x y de la velocidad $v = dx/dt$ de la partícula, la ley $F = ma$, con $a = d^2x/dt^2$ la aceleración de la partícula, conduce a

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F(t, x, \frac{dx}{dt})\,, \tag{I.1.2}$$

que es una ecuación diferencial para la posición en función del tiempo $x(t)$.

En forma similar, para una partícula que se mueve en el espacio tridimensional, a partir de la misma ley de movimiento se tiene

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{r}, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt})\,, \tag{I.1.3}$$

donde el vector $\boldsymbol{r}(t)$, de componentes cartesianas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$, denota la posición de la partícula y el vector $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{r}, \frac{d\boldsymbol{r}}{dt})$ una fuerza dependiente del tiempo t, el vector posición $\boldsymbol{r}$ y el vector velocidad $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$. La ecuación (I.1.3) es, en realidad, un *sistema* de tres ecuaciones diferenciales acopladas para $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. En forma explícita,

$$\left\{\begin{array}{lcl} m\frac{d^2x}{dt^2} & = & F_x(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) \\ m\frac{d^2y}{dt^2} & = & F_y(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) \\ m\frac{d^2z}{dt^2} & = & F_z(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}) \end{array}\right. \tag{I.1.4}$$

Finalmente, otro ejemplo de ecuación diferencial es la *ecuación de Laplace*, que trataremos en detalle más adelante en este libro. Tal ecuación tiene una importancia fundamental en distintas áreas de la Física. En tres dimensiones y en coordenadas cartesianas, esta ecuación se escribe:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0\,, \tag{I.1.5}$$

donde la función incógnita φ depende ahora de tres variables x, y, z. La ecuación de Laplace, a diferencia de los ejemplos anteriores, es una ecuación diferencial en *derivadas parciales*.

Como veremos, esta ecuación surge en el planteo de distintos problemas físicos. Por ejemplo, φ puede representar el potencial electrostático en ausencia de cargas, o también la temperatura estacionaria en un material conductor en ausencia de fuentes o sumideros de calor, e incluso, si eliminamos la variable z, la altura de una membrana elástica tensa, en situación estacionaria. Esta coincidencia no es infrecuente en Física: fenómenos y magnitudes físicas muy distintas pueden ser descriptas por una misma ecuación diferencial, dando lugar a *analogías físicas*. Sólo la interpretación (y las unidades!) serán distintas.

I.2. Definiciones básicas

Definición I.2.1 *Una ecuación en la cual la función incógnita aparece afectada por una o más derivadas se llama* **ecuación diferencial (e.d.)**.

Definición I.2.2 *Si, en la e.d., la función incógnita es función de una sola variable (como ocurre en (I.1.1), (I.1.2) y (I.1.3)), la e.d. se denomina* **ecuación diferencial ordinaria**. *Una e.d. ordinaria puede escribirse como*

$$F(t, u, \frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}, \ldots) = 0\,, \tag{I.2.1}$$

donde la incógnita es la función $u(t)$.

Definición I.2.3 *Si, en cambio, la función incógnita es función de dos o más variables (como ocurre en (I.1.5)), la e.d. se denomina* **ecuación diferencial en derivadas parciales**. *Por ejemplo, en el caso de dos variables, una ecuación de este tipo puede escribirse como*

$$F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \ldots) = 0\,, \tag{I.2.2}$$

donde la incógnita es la función $u(x_,y)$.

En general, en Física, el estudio de sistemas con número finito de grados de libertad conduce a ecuaciones diferenciales ordinarias (ver capítulo VI), mientras que el estudio de medios continuos conduce a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Definición I.2.4 *Se llama* **orden** *de una e.d. al orden de la derivada de mayor orden de la función incógnita que figura en la ecuación. Por ejemplo, (I.1.1) es de orden uno, o de primer orden, mientras que (I.1.2), (I.1.3) y (I.1.5) son de orden dos, o de segundo orden.*

Una ecuación diferencial ordinaria de orden n puede, entonces, escribirse en la forma general

$$F(t, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^n u}{dt^n}) = 0\,. \tag{I.2.3}$$

La determinación de la función incógnita es el problema fundamental que ataca la teoría de ecuaciones diferenciales.

Definición I.2.5 *Se llama* **solución** *de una e.d. a una función que, sustituida en la e.d., la satisface.*

Por ejemplo, $N(t) = Ce^{-kt}$, con C constante arbitraria, es solución de I.1.1. En efecto,

$$\frac{dN(t)}{dt} = -Cke^{-kt} = -kN(t)\,.$$

La constante arbitraria C queda determinada si se conoce N a un dado tiempo. Por ejemplo, si

$$N(0) = N_0\,, \tag{I.2.4}$$

resulta $C = N_0$, y se tiene $N(t) = N_0 e^{-kt}$.

La ecuación (I.1.1) y la condición inicial (I.2.4) constituyen un **problema de condiciones iniciales**.

Definición I.2.6 *El proceso de determinación de las soluciones de una e.d. se llama* **resolución o integración** *de la ecuación.*

Tal proceso puede ser simple, como en el caso anterior pero, en general, se hace necesario utilizar métodos aproximados, que suelen conducir a una integración numérica. Otras veces, puede interesarnos conocer sólo ciertas propiedades de las soluciones, como su comportamiento frente a pequeñas variaciones de las condiciones iniciales (problemas de estabilidad) o adquirir una idea gráfica de su comportamiento, graficando campos de derivadas o curvas equipotenciales.

La resolución de una e.d. de orden n requiere n integraciones, con la consiguiente aparición de n constantes de integración. Surge, entonces, la siguiente definición:

Definición I.2.7 *Una solución de la e.d. en que una o más de esas n constantes toman un valor particular se llama* **solución particular** *de la e.d.. La solución con las n constantes indeterminadas se llama* **solución general** *de la e.d..*

Como veremos durante el desarrollo de este libro, en los problemas de interés físico se proveen, además de la (o las) ecuaciones diferenciales, ciertos datos o **condiciones complementarias** que permiten determinar las constantes en la solución general. Tales condiciones pueden ser de distintos tipos: condiciones de Cauchy (como ocurre en los problemas de valores iniciales para ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales que estudiaremos en primer lugar) o condiciones de contorno, como los que aparecerán cuando consideremos el problema de Sturm-Liouville. En general, al resolver problemas asociados con ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, deberán imponerse tanto condiciones iniciales como de contorno. En todos los casos, adoptaremos esta definición, debida a Jacques Hadamard [2]:

Definición I.2.8 *Un problema que involucra ecuaciones diferenciales se llama* **bien planteado** *si:*

1. *Tiene solución.*
2. *Su solución es única.*
3. *La solución depende de modo continuo de las condiciones complementarias y de todos los parámetros del problema.*

I.3. Ecuaciones diferenciales lineales

Un caso que merece sin duda especial consideración es el de las ecuaciones diferenciales *lineales*. Estas desempeñan un papel fundamental en la Física. Tanto la ecuación de Laplace (I.1.5), como la ecuación de Schrödinger de la Mecánica Cuántica y las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo (en su forma diferencial y en el vacío), son ejemplos de ecuaciones o sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Definición I.3.1 *Una ecuación diferencial es* **lineal** *si, en la ecuación (I.2.1) o (I.2.2), F es una función lineal de la función incógnita y todas sus derivadas (aunque no necesariamente de la variable independiente).*

Así, para u escalar, la ecuación diferencial lineal ordinaria de orden n más general puede escribirse como

$$a_n(t)\frac{d^n u}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0(t)u = f(t), \qquad a_n(t) \; \neq 0\,, \tag{I.3.1}$$

donde los coeficientes $a_m(t)$, $m = 0, \ldots, n$ son, en general funciones de t.

La ecuación (I.3.1) suele escribirse en la forma

$$L[u] = f(t), \tag{I.3.2}$$

donde

$$L = \sum_{m=0}^{n} a_m(t) \frac{d^m}{dt^m} \tag{I.3.3}$$

es un operador diferencial lineal, es decir que, si c_1 y c_2 son constantes y $u_1(t)$, $u_2(t)$ funciones n veces derivables,

$$L[c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)] = c_1 L[u_1(t)] + c_2 L[u_2(t)]\,. \tag{I.3.4}$$

Esta propiedad *define* la linealidad de L. Aclaremos que el operador L queda en realidad completamente definido cuando, además de su expresión diferencial, se especifica su dominio.

Definición I.3.2 *La ecuación diferencial lineal se denomina* **homogénea** *si* $f(t) = 0$. *Esta es entonces de la forma*

$$L[u] = 0$$

con L *un operador diferencial lineal. Si* $f(t) \neq 0$ *la ecuación diferencial lineal se denomina inhomogénea.*

Un ejemplo simple de ecuación diferencial ordinaria lineal y homogénea es la ecuación (I.1.1) de la desintegración radioactiva. La ecuación (I.1.2) será lineal sólo cuando la fuerza F sea una función lineal de x y dx/dt (o de las componentes de $\boldsymbol{r}$ y $d\boldsymbol{r}/dt$ en (I.1.3)). Por ejemplo, este es el caso de una partícula de masa m sujeta a un resorte de constante k y sometida a una fuerza adicional que depende explícitamente del tiempo, $f(t)$. Considerando por simplicidad que se mueve en una dimensión espacial, y denotando ahora la posición de la partícula por $u(t)$, la correspondiente ecuación de movimiento es

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -ku + f(t)$$

que podemos escribir como

$$L[u] = f(t), \quad L[u] = m\frac{d^2u}{dt^2} + ku$$

donde L es claramente un operador lineal ($a_2(t) = m$, $a_1(t) = 0$, $a_0(t) = k$ en (I.3.1)). Esta ecuación constituye por lo tanto una ecuación diferencial lineal ordinaria de segundo orden. Será homogénea en el caso de fuerza externa nula ($f(t) = 0$). El agregado de una

fuerza de roce proporcional a la velocidad ($F_r = -\gamma\frac{du}{dt}$) no altera el carácter lineal de la ecuación diferencial, aun si los parámetros m, k y γ dependen explícitamente del tiempo.

De manera análoga, una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales para una función u escalar que dependa de dos variables x, y, es de la forma

$$a_0 u + a_x\frac{\partial u}{\partial x} + a_y\frac{\partial u}{\partial y} + a_{xx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{xy}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + a_{yy}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \ldots = f(x, y), \qquad \text{(I.3.5)}$$

donde todos los coeficientes a_0, a_x, a_y, a_{xx} ... pueden ser funciones de (x, y). Esta ecuación puede también escribirse como

$$L[u] = f(x, y)\,,$$

donde

$$L[u] = a_0 + a_x\frac{\partial}{\partial x} + a_y\frac{\partial u}{\partial y} + a_{xx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{xy}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + a_{yy}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \ldots \qquad \text{(I.3.6)}$$

es un operador diferencial lineal: Si c_1 y c_2 son constantes y $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ funciones con derivadas parciales hasta el mayor orden que aparece en L, nuevamente

$$L[c_1 u_1(x, y) + c_2 u_2(x, y)] = c_1 L[u_1(x, y)] + c_2 L[u_2(x, y)]\,.$$

Como en el caso ordinario, la ecuación diferencial lineal en derivadas parciales se denomina homogénea si $f(x, y) = 0$ e inhomogénea si $f(x, y) \neq 0$. La extensión al caso de tres o más variables es inmediata.

La ecuación de Laplace (I.1.5) es un ejemplo de ecuación diferencial en derivadas parciales lineal y homogénea. Suele escribirse como

$$\Delta\varphi = 0\,, \qquad \text{(I.3.7)}$$

donde

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{(I.3.8)}$$

es el *laplaciano* (en tres dimensiones y expresado en coordenadas cartesianas), un operador diferencial *lineal* que desempeña un papel central en la Física.

Un ejemplo de ecuación diferencial lineal inhomogénea en derivadas parciales es la que determina el potencial electrostático en presencia de una distribución de carga dada $\rho(x, y, z)$:

$$\Delta\phi = f(x, y, z)\,, \qquad \text{(I.3.9)}$$

con $f(x, y, z) = -\rho(x, y, z)/\varepsilon$, donde ε es la permitividad del medio. Esta ecuación recibe el nombre de *ecuación de Poisson*.

I.4. Propiedades fundamentales de las ecuaciones diferenciales lineales

Ya hemos mencionado que las ecuaciones diferenciales lineales aparecen a menudo en la descripción de fenómenos físicos. Sus propiedades matemáticas son igualmente sobresalientes. Debido a la linealidad de L, es posible derivar en forma inmediata ciertas propiedades fundamentales de las soluciones de estas ecuaciones, *aun sin conocerlas explícitamente*.

Consideremos primero la ecuación lineal homogénea

$$L[u] = 0\,. \qquad \text{(I.4.1)}$$

Propiedad 0: Existencia de solución trivial:
La solución idénticamente nula $u = 0$ ($\forall\, t$ en el caso ordinario o $\forall\, x, y, \ldots$ en el general), es siempre una solución de (I.4.1), denominada solución trivial.

Esto es inmediato de las expresiones (I.3.1) y (I.3.5), ya que todas las derivadas de la función nula son también nulas. Formalmente, es consecuencia directa de la linealidad de L, dado que si c es una constante, $L[cu] = cL[u]$ y por lo tanto, para $c = 0$ tenemos $L[0] = L[0u] = 0L[u] = 0$. Destaquemos, no obstante, que la solución trivial no es, en general, la única solución posible de (I.4.1).

Propiedad 1: Superposición

Si u_1 y u_2 son dos soluciones de la ecuación homogénea (I.4.1), de modo que satisfacen $L[u_1] = L[u_2] = 0$, la combinación lineal $u = c_1u_1 + c_2u_2$ *es también solución de (I.4.1)* $\forall\, c_1$, c_2. Esto es muy fácil de probar debido al carácter lineal del operador L:

$$L[u_1] = 0, \quad L[u_2] = 0 \quad \Rightarrow \quad L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1L[u_1] + c_2L[u_2] = 0\,.$$

Es también inmediato demostrar esta propiedad para combinaciones lineales de un número finito de soluciones. Además, es evidente que esta propiedad es válida tanto para ecuaciones lineales homogéneas ordinarias como en derivadas parciales.

Las consecuencias de esta propiedad evidente de las ecuaciones diferenciales lineales son importantísimas para la Física. Por ejemplo, en el caso de la masa unida a un resorte, implica que si $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son dos soluciones posibles para la posición de la partícula (correspondientes a distintas condiciones iniciales), cualquier combinación lineal $c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ es también solución, es decir, es también un movimiento posible de la partícula!, que corresponde a otra condición inicial. Además, permite descomponer soluciones de aspecto complejo como combinación lineal de soluciones más simples. Utilizaremos esta técnica repetidamente en secciones posteriores.

Desde un punto de vista más matemático, y en particular en el contexto del Álgebra Lineal, las propiedades 0 y 1 anteriores implican que el conjunto de todas las soluciones de la ecuación lineal homogénea *es un espacio vectorial* (sobre el cuerpo de los reales o

complejos). Veremos más adelante (ver la sección II.3.2) que en el caso de una ecuación diferencial lineal ordinaria de orden n, es un espacio vectorial de *dimensión* n, mientras que, en el caso de una ecuación diferencial en derivadas parciales (con dos o más variables), se trata de un espacio vectorial de dimensión *infinita*.

Pasemos ahora a la ecuación inhomogénea

$$L[u] = f\,. \tag{I.4.2}$$

Como consecuencia de la linealidad de L, resulta también inmediata la siguiente propiedad, no menos importante que las anteriores:

Propiedad 2: Solución general de la ecuación inhomogénea: Está dada por la suma de la solución general u_h de la ecuación homogénea $L[u] = 0$, más una solución particular u_p (arbitraria) de la ecuación inhomogénea:

$$L[u] = f \Rightarrow u = u_h + u_p, \quad L[u_h] = 0, \quad L[u_p] = f\,.$$

Demostración: En primer lugar, si u_p es una solución de la ecuación inhomogénea y u_h es una solución de la ecuación homogénea, $u_p + u_h$ es también solución de la ecuación inhomogénea, ya que

$$L[u_p + u_h] = L[u_p] + L[u_h] = f + 0 = f\,.$$

En segundo lugar, si w_p es otra solución de la ecuación inhomogénea, la linealidad de L implica también

$$L[w_p - u_p] = L[w_p] - L[u_p] = f - f = 0\,,$$

de modo que la diferencia $w_p - u_p$ *es una solución* u_h *de la ecuación homogénea*. Por lo tanto, podemos escribir cualquier solución particular w_p de la ecuación inhomogénea como

$$w_p = u_p + u_h\,,$$

donde u_p es una solución particular (arbitraria) de la ecuación inhomogénea y u_h una solución de la ecuación homogénea.

Esto implica que para obtener la solución general de la ecuación inhomogénea, basta con conocer la solución general de la ecuación homogénea y una solución particular (cualquiera) de la ecuación inhomogénea.

En el ejemplo de la partícula unida a un resorte, esto muestra que para conocer el movimiento frente a una fuerza adicional con dependencia temporal explícita $f(t)$, debemos primero determinar cómo se mueve la partícula en ausencia de fuerza ($f(t) = 0$), encontrando la solución general de la ecuación homogénea y, luego, encontrar alguna solución particular en presencia de la fuerza $f(t)$. Finalmente, se deben sumar ambas soluciones.

Nótese, sin embargo, que el conjunto de soluciones de la ecuación inhomogénea *no es un espacio vectorial*. Por ejemplo, la suma de dos soluciones particulares de la ecuación

inhomogénea no es una solución particular de dicha ecuación. Es válida en cambio la siguiente propiedad de superposición:

Propiedad 3: Si $L[u_1] = f_1$ y $L[u_2] = f_2$, entonces

$$L[c_1u_1 + c_2u_2] = c_1L[u_1] + c_2L[u_2] = c_1f_1 + c_2f_2\,.$$

En otras palabras, si f es combinación lineal de f_1 y f_2, $f = c_1f_1 + c_2f_2$, y se conocen soluciones particulares u_{p1} y u_{p2} de $L[u] = f_1$ y $L[u] = f_2$, entonces una solución particular de $L[u] = f$ estará dada por la combinación lineal $u_p = c_1u_{p1} + c_2u_{p2}$ de estas soluciones particulares.

En particular, si c es una constante y $L[u_p] = f \Rightarrow L[cu_p] = cL[u_p] = cf$. Si f se multiplica por una constante, podemos pues obtener la correspondiente solución particular multiplicando la solución para f también por dicha constante. En el ejemplo de la partícula unida a un resorte, si duplicamos la fuerza $f(t)$, obtenemos una solución particular duplicando la solución particular para $f(t)$. Esto parece muy intuitivo, pero en realidad es válido en general sólo cuando la ecuación diferencial es lineal.

La presente propiedad de superposición sugiere que si se puede expresar f en términos de "componentes" f_i más "simples", para las cuales se conocen las soluciones particulares u_i, entonces se conoce también una solución particular para f:

$$L[u_i] = f_i,\;\; i = 1,\ldots,m \;\Rightarrow L[\sum_{i=1}^{m} c_iu_i] = \sum_{i=1}^{m} c_iL[u_i] = \sum_{i=1}^{m} c_if_i\,.$$

Como consecuencia de ello, en un sistema lineal la respuesta a una "señal" arbitraria (que corresponde matemáticamente a la solución a una ecuación diferencial lineal inhomogénea) puede obtenerse descomponiendo la misma en componentes simples (ya sea armónicas de frecuencia definida, o concentradas en un intervalo de tiempo muy pequeño), para las que es más fácil obtener la respuesta (es decir, la solución particular). Luego se suman todas estas respuestas particulares. Veremos esta técnica en detalle más adelante, siendo su uso muy extendido en Física e Ingeniería. Más aún, veremos que prácticamente *toda* función puede descomponerse en términos simples del tipo previo, por lo que en sistemas lineales basta con conocer las respuestas a estas últimas! Debido a la propiedad 3 es también posible construir una solución particular de la ecuación inhomogénea que es una función lineal de f: $u_p = G(f)$, con $G(c_1f_1 + c_2f_2) = c_1G(f_1) + c_2G(f_2)$.

Propiedad 4: Soluciones complejas para L real

En el caso en que todos los coeficientes a_m en (I.3.1), o todos los a_0, a_x, a_y, etc. en (I.3.5), son funciones *reales*, y tanto t en (I.3.1) como x, y en (I.3.5) son también reales, la linealidad de L permite el uso de una técnica muy extendida en toda la física y la ingeniería: Soluciones complejas. Con complejas nos referimos aquí a soluciones que tienen parte real e imaginaria, es decir, que son funciones $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ en el caso de ecuaciones ordinarias (o $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ en ecuaciones a derivadas parciales).

Consideremos primero la ecuación homogénea. Si existe una solución compleja $u = u_r + iu_i$ de $L[u] = 0$, entonces tanto la parte real $u_r = \mathrm{Re}(u)$ como la imaginaria $u_i = \mathrm{Im}(u)$ son soluciones (reales) de la ecuación homogénea:

$$L[u] = 0 \quad \Rightarrow \quad L[\mathrm{Re}(u)] = 0, \quad L[\mathrm{Im}(u)] = 0\,.$$

En efecto, como $L[u] = 0 = 0 + i0$ y L es lineal, tenemos

$$L[u_r + iu_i] = L[u_r] + iL[u_i] = 0 + i0\,.$$

Como, además, L es real, *tanto* $L[u_r]$ *como* $L[u_i]$ *son reales*, por lo que la ecuación anterior implica

$$L[u_r] = 0, \quad L[u_i] = 0\,.$$

Por supuesto, tenemos también que, si u_r y u_i son soluciones reales, entonces $u = u_r + iu_i$ es también una solución (caso particular de la propiedad de superposición).

El lector podrá pensar para qué puede servir una solución compleja en un problema típico donde u representa una magnitud física real, tal como una posición o potencial eléctrico. La respuesta es que en ciertos casos resulta más fácil obtener o plantear soluciones complejas, y luego obtener de ellas las soluciones reales !

El ejemplo típico, como veremos más adelante, es plantear una solución de la forma $u(t) = e^{\lambda t}$ para una ecuación diferencial ordinaria homogénea con coeficientes constantes. Si resulta que λ debe ser complejo para que $u(t)$ sea solución, entonces tal solución compleja nos brinda directamente dos soluciones reales linealmente independientes: Si $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$, con $\lambda_r \in \Re$ y $\lambda_i \in \Re$, entonces la fórmula de Euler nos dice que

$$e^{\lambda t} = e^{\lambda_r t}[\cos(\lambda_i t) + i\sin(\lambda_i t)]$$

y por lo tanto, que

$$u_r = \mathrm{Re}[u] = e^{\lambda_r t}\cos(\lambda_i t), \quad u_i = \mathrm{Im}[u] = e^{\lambda_r t}\sin(\lambda_i t)$$

serán ambas soluciones reales de $L[u] = 0$ si $L[e^{\lambda t}] = 0$. Resulta más fácil y sencillo plantear una solución del tipo $e^{\lambda t}$ que de la forma $e^{\alpha t}\cos(\omega t)$ o similar. De hecho, todo movimiento oscilatorio, puro o amortiguado, resulta más fácil de describir en términos de exponenciales complejas, y así es como se los suele tratar en Física e Ingeniería.

Una consecuencia inmediata de la discusión anterior es que si $u(t) = u_r(t) + iu_i(t)$ es una solución compleja de $L[u] = 0$, entonces la función conjugada $\bar{u}(t) = u_r(t) - iu_i(t)$ es también solución de $L[u] = 0$ ya que, en definitiva, cualquier combinación lineal de $u_r(t)$ y $u_i(t)$ será solución. No obstante, destaquemos que esta propiedad se deriva directamente del carácter real de L, ya que si $L[u] = 0$, conjugando esta ecuación obtenemos directamente $L[\bar{u}] = 0$.

Por otro lado, es importante destacar que, si L es lineal pero no es real, o si L es real pero *no es un operador lineal*, la propiedad anterior *no es válida* en general. Por ejemplo, si la ecuación diferencial contiene un término proporcional a u^2, las componentes reales

e imaginarias se van a " mezclar", y entonces $L[u_r + iu_i] = 0$ no implica necesariamente que $L[u_r] = 0$ o $L[u_i] = 0$, aun si L es real.

La utilización de soluciones complejas en ecuaciones diferenciales lineales reales se extiende al caso inhomogéneo. Si $f = f_r + if_i$, con f_r y f_i funciones reales, y si $u_p = u_{pr} + iu_{pi}$ es una solución particular de la ecuación inhomogénea, entonces $u_{pr} = \mathrm{Re}[u_p]$ es solución real de $L[u] = f_r$, y $u_{pi} = \mathrm{Im}[u_p]$ es solución real de $L[u] = f_i$:

$$L[u_p] = f_r + if_i \quad \Rightarrow \quad L[\mathrm{Re}(u_p)] = f_r, \quad L[\mathrm{Im}(u_p)] = f_i \, .$$

En efecto,

$$L[u_p] = L[u_{pr} + iu_{pi}] = L[u_{pr}] + iL[u_{pi}] = f_r + if_i$$

y, como u_{pr} y u_{pi} son reales y L es real, igualando partes real e imaginaria obtenemos

$$L[u_{pr}] = f_r, \quad L[u_{pi}] = f_i \, .$$

que es lo que queríamos demostrar.

Nuevamente, el lector podrá dudar de la utilidad de este resultado, ya que en un problema físico típico f será real. Sin embargo, nuevamente puede resultar muy conveniente escribir f como la parte real o imaginaria de una f compleja, para encontrar más rápida y claramente la solución particular.

El caso típico es el de una $f(t)$ de la forma $A\cos(\omega t)$ con A y ω reales (por ejemplo, una fuerza externa periódica de frecuencia angular ω en el ejemplo de la masa unida a un resorte), que podemos escribir como

$$f_r(t) = \mathrm{Re}[Ae^{i\omega t}] \, .$$

El procedimiento usual es entonces resolver, en lugar de la ecuación $L[u] = A\cos\omega t$, la ecuación compleja

$$L[u] = Ae^{i\omega t}$$

y luego tomar la parte real de la solución particular compleja $u_p(t)$ obtenida. Así, la parte real satisfará la ecuación

$$L[u_{pr}] = A\cos\omega t$$

y la parte imaginaria la ecuación

$$L[u_{pi}] = A\sin\omega t \, .$$

Resolver la ecuación compleja no sólo resulta en este caso más fácil, como veremos más adelante, sino que además permite resolver, *en un solo paso*, dos problemas inhomogéneos reales: $L[u] = A\cos\omega t$ y $L[u] = A\sin\omega t$ (y de hecho también $L[u] = A\cos(\omega t + \phi)$ para cualquier fase ϕ).

Estas cuatro propiedades fundamentales de las ecuaciones diferenciales lineales permiten desarrollar métodos generales para la resolución de estas ecuaciones, que serán presentados en detalle en los próximos capítulos.

Capítulo II

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Generalidades y Problemas de Condiciones Iniciales

II.1. Generalidades

Como hemos visto, una ecuación diferencial ordinaria de orden n puede escribirse en la forma general

$$F(t, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^n u}{dt^n}) = 0\,, \tag{II.1.1}$$

donde la incógnita es la función $u(t)$.

Definición II.1.1 *La ecuación se llama* **homogénea** *de grado p si, al multiplicar $u(t)$ y todas sus derivadas por un parámetro λ, se tiene:*

$$F(t, \lambda u, \lambda\frac{du}{dt}, \ldots, \lambda\frac{d^n u}{dt^n}) = \lambda^p F(t, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^n u}{dt^n})\,, \tag{II.1.2}$$

con p arbitrario (es decir, si F es una función homogénea de grado p en la incógnita y todas sus derivadas).

Una ecuación lineal homogénea es, pues, un ecuación homogénea de grado $p = 1$.

Comenzaremos estudiando las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.

II.2. Ecuaciones de primer orden: Algunos casos de fácil resolución

Consideremos, ahora, ecuaciones de la forma

$$\frac{du}{dt} = f(t, u)\,. \tag{II.2.1}$$

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden puede siempre reducirse a esta forma tras resolver la ecuación original respecto a la derivada. Veremos más adelante un importante teorema, debido a Picard, de *existencia y unicidad* de la solución para las ecuaciones del tipo (II.2.1). Pero primero presentaremos algunos métodos elementales de resolución para casos particulares, que permitirán apreciar varias propiedades generales.

II.2.1. Ecuaciones con variables separables

Si $f(t, u)$ no depende de u, (II.2.1) se reduce a

$$\frac{du}{dt} = f(t)\,, \tag{II.2.2}$$

cuya solución general es (si $f(t)$ es integrable)

$$u(t) = \int f(t)dt + c\,. \tag{II.2.3}$$

La constante c se denomina *constante de integración*, y puede determinarse conociendo el valor de u a un dado tiempo t_0 (es decir, el valor inicial): Si $u(t_0) = u_0$ se tiene

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} f(t')dt' + u_0\,. \tag{II.2.4}$$

Cuando $f(t, u) = h(t)g(u)$, la ecuación (II.2.1) se convierte en

$$\frac{du}{dt} = h(t)g(u)\,. \tag{II.2.5}$$

Esta ecuación puede reescribirse, para $g(u) \neq 0$, como

$$\frac{du}{g(u)} = h(t)dt\,, \tag{II.2.6}$$

cuya solución general es

$$\int \frac{du}{g(u)} = \int h(t)dt + c\,. \tag{II.2.7}$$

Esta ecuación, del tipo $\phi(t, u) = c$, determina *implícitamente* la solución $u(t)$. La solución particular para $u(t_0) = u_0$, con $g(u_0) \neq 0$, está dada por

$$\int_{u_0}^{u} \frac{du'}{g(u')} = \int_{t_0}^{t} h(t')dt'\,. \tag{II.2.8}$$

Para $g(u) = 1$ se obtiene, por supuesto, la ecuación (II.2.4). Si, además, existen raíces u_r tales que $g(u_r) = 0$, a la solución (II.2.7) se deben agregar también las soluciones constantes

$$u(t) = u_r, \quad \text{con} \quad g(u_r) = 0\,,$$

que no necesariamente se obtienen de (II.2.7) o (II.2.8), pero que son obviamente soluciones de (II.2.5).

Observar que el caso en que $f(t, u)$ no depende de t corresponde a $h(t) = 1$ en (II.2.5). El segundo miembro de (II.2.8) se reduce, entonces, a $t - t_0$, y la solución $u(t)$ dependerá, pues, sólo de la diferencia $t - t_0$. Eso refleja la invariancia, en este caso, de la ecuación (II.2.5) frente a traslaciones temporales. El que sigue es un ejemplo de este caso.

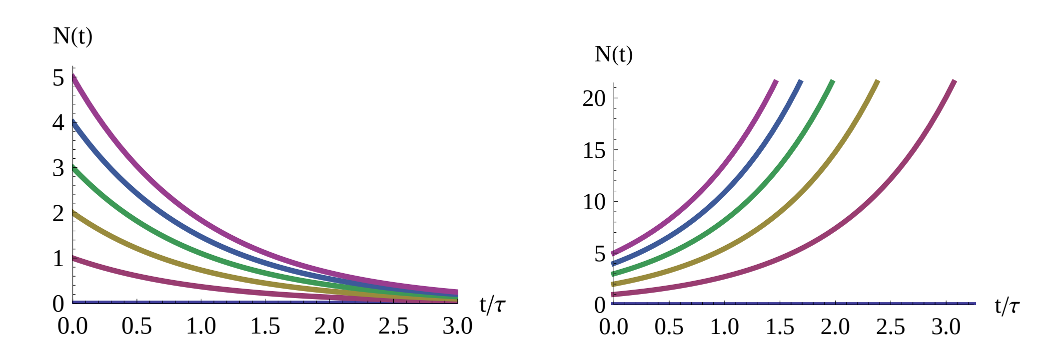


Figura 1: Gráfico de las soluciones (II.2.11) para $t \geq 0$ y distintos valores de N_0, para $k > 0$ (izquierda) y $k < 0$ (derecha), con $\tau = |k|^{-1}$.

Ejemplo II.2.1: Consideremos la ecuación diferencial lineal (I.1.1):

$$\frac{dN(t)}{dt} = -kN(t)\,. \tag{II.2.9}$$

Si $N(t) \neq 0$ se tiene:

$$\frac{dN}{N} = -kdt\,,$$

lo que conduce a

$$\int \frac{dN}{N} = \ln|N| = -\int kdt + c = -kt + c\,,$$

o sea,

$$N(t) = Ce^{-kt}\,, \tag{II.2.10}$$

donde $C = \pm e^c$. El valor de C puede determinarse a partir de la condición inicial: Si $N(t_0) = N_0 \Rightarrow C = N_0 e^{\lambda t_0}$ y

$$N(t) = N_0 e^{-k(t-t_0)}\,. \tag{II.2.11}$$

Obtenemos así la conocida fórmula para la desintegración radiactiva, si $k > 0$, y para el crecimiento exponencial de una población, si $k < 0$. Si bien la deducción anterior es válida para $N(t) \neq 0$ (o sea, $N_0 \neq 0$), para $N_0 = 0$ se recupera la solución constante de (I.1.1), $N(t) = 0\;\forall\, t$, que corresponde a $C = 0$ ($c \to -\infty$) en (II.2.10). Se verifica entonces que el conjunto de soluciones de (II.2.9) es un espacio vectorial de dimensión 1: toda solución es múltiplo de la solución e^{-kt} (base del espacio).

Nótese también que las curvas $N(t)$ para distintos valores de C, es decir, distintos valores iniciales N_0, nunca se cruzan (Fig. 1), por ser la solución *única* para cualquier valor de N_0 y t_0. Por cada punto (t, N) pasa una y sólo una solución de (II.2.9).

Ejemplo II.2.2: Consideremos ahora la ecuación diferencial no lineal

$$\frac{dN}{dt} = -kN^2\,.$$

Escribiéndola, para $N \neq 0$, en la forma $dN/N^2 = -kdt$, obtenemos $-\frac{1}{N} = -kt + c$, y

$$N(t) = \frac{1}{kt - c}\,. \tag{II.2.12}$$

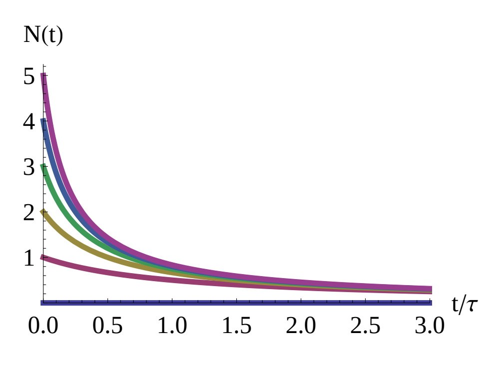
Si $N(t_0) = N_0 \Rightarrow c = kt_0 - N_0^{-1}$ y entonces,

$$N(t) = \frac{N_0}{1 + N_0 k(t - t_0)}\,. \tag{II.2.13}$$

Existe, además, la solución trivial $N(t) = 0\ \forall\ t$, la cual no es en principio un caso particular de (II.2.12), aunque puede obtenerse de (II.2.13) para $N_0 = 0$ ($c \to \pm\infty$). El conjunto de soluciones no es ahora un espacio vectorial, ya que las distintas soluciones no son múltiplos de una solución base. La solución general depende en forma no lineal de la constante de integración c o condición inicial N_0. No obstante, existe nuevamente una única solución para todo valor inicial N_0 (y $\forall\ t_0$), por lo que las curvas $N(t)$ para distintos valores de N_0 no se cruzan (Fig. 2).

Para $N_0 > 0$ y $k > 0$, se obtiene en este caso un decrecimiento mucho más lento que el decrecimiento exponencial del ejemplo II.2.1: Ahora $N(t) \approx \frac{1}{k(t-t_0)}$ para $t - t_0 \gg (N_0 k)^{-1}$. Esto se debe a que al disminuir N, $dN/dt \propto N^2$ se hace más pequeño que N. Nótese también que $N(t)$ se torna aproximadamente independiente de la condición inicial N_0 para $t - t_0 \gg (N_0 k)^{-1}$, a diferencia de lo que ocurría en el ejemplo lineal anterior.

Es también interesante considerar el caso $k < 0$. En lugar de un crecimiento exponencial, obtenemos un crecimiento "explosivo", que *diverge* para $t \to t_c = t_0 + (|k|N_0)^{-1}$, es decir, para un tiempo *finito*. Esto refleja el hecho de que al crecer N, $\frac{dN}{dt}$ aumenta en este caso muy rápidamente. Matemáticamente, este ejemplo muestra que aún cuando $f(t, u)$ sea una función continua y derivable, por ejemplo tan simple como u^2, no necesariamente existe una solución continua de (II.2.1) para todo $t > t_0$. Veremos luego este punto con mayor detalle.



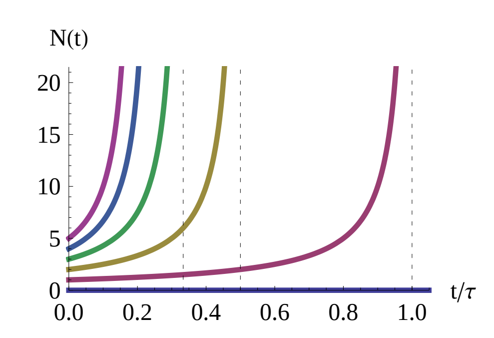


Figura 2: Gráfico de las soluciones (II.2.13) para $t \geq 0$ y distintos valores de N_0, para $k > 0$ (izquierda) y $k < 0$ (derecha), con $\tau = |k|^{-1}$. Las líneas punteadas (derecha) indican las asíntotas verticales.

Ejemplo II.2.3: Ecuación de Clausius-Clapeyron para la presión de vaporización $P(T)$ en función de la temperatura absoluta T.

Consideremos la ecuación

$$\frac{dP}{dT} = \frac{lP}{RT^2}\,, \tag{II.2.14}$$

para $P > 0$ y $T > 0$, donde l es el calor latente y R la constante de Rayleigh. La ecuación puede reescribirse en la forma

$$\frac{dP}{P} = \frac{l\,dT}{RT^2}\,.$$

Se integra fácilmente, con el resultado

$$\log|P| = \log P = \frac{-l}{RT} + \log C\,,$$

donde $C > 0$; de aquí resulta

$$P(T) = C\,e^{-l/(RT)}\,.$$

Si no determinamos C tendremos una familia de soluciones. C queda determinada si se conoce P a una dada temperatura $T_0 > 0$. Por ejemplo, si se conoce la presión de vaporización a temperatura ambiente $P(T_0) = P_0$, resulta $C = P_0 e^{\frac{l}{RT_0}}$ y, por lo tanto,

$$P(T) = P_0\,e^{\frac{-l}{R}(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0})}\,. \tag{II.2.15}$$

Notemos que existe solución *única* para cualquier P_0 y $T_0 > 0$, lo que implica nuevamente que las curvas $P(T)$ para distintos valores de P_0 no se cruzan para $T > 0$ (Fig. 3). Por el contrario, todas las curvas convergen a 0 para $T \to 0^+$. Matemáticamente, este comportamiento está relacionado con la singularidad del miembro derecho en (II.2.14) para $T \to 0$, tema que discutiremos en breve.

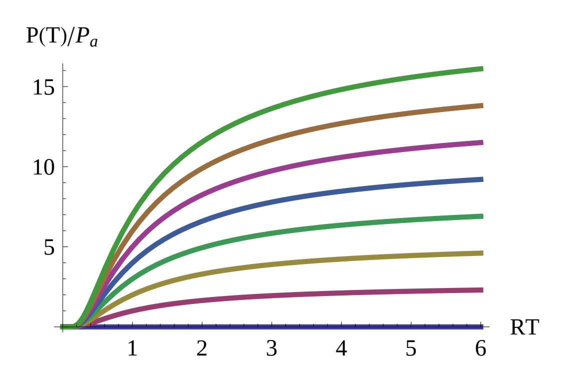


Figura 3: Gráfico de las soluciones (II.2.15) para $T > 0$ y distintos valores de $P_0 = P(T_0)$ (P_a es la unidad de presión).

II.2.2. Ecuaciones reducibles a variables separables

En algunos casos es posible reducir la ecuación diferencial a una ecuación del tipo (II.2.5) mediante un cambio de variables sencillo. Por ejemplo, si

$$\frac{du}{dt} = f(au + bt)\,, \tag{II.2.16}$$

reemplazando $z = au + bt$, obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = a\frac{du}{dt} + b = af(z) + b\,,$$

que es de la forma (II.2.5). Por lo tanto, si $af(z) + b \neq 0$,

$$\int \frac{dz}{af(z) + b} = t + c\,,$$

que determina $z(t)$ y $u(t) = (z(t) - bt)/a$. Si $\exists\, z_0$ tal que $af(z_0) + b = 0$, debemos agregar las soluciones $z = z_0$, o sea $u(t) = (z_0 - bt)/a$.

Análogamente, si

$$\frac{du}{dt} = f(u/t)\,, \tag{II.2.17}$$

reemplazando $z = u/t$ obtenemos

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t}\frac{du}{dt} - \frac{u}{t^2} = (f(z) - z)\frac{1}{t}\,,$$

que es nuevamente de la forma (II.2.5). Por lo tanto,

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c\,, \tag{II.2.18}$$

que determina $z(t)$ y $u(t) = tz(t)$. Si $\exists\ z_0$ tal que $f(z_0) = z_0$, se deben agregar las soluciones $z = z_0$, o sea, $u(t) = z_0 t$. La ecuación (II.2.17) se denomina, a veces, ecuación diferencial "homogénea" de primer orden (atención: eso puede conducir a confusiones con la definición general II.1.1), y su solución (II.2.18) es de la forma $F(u/t) = c't$, con $F(z) = e^{\int dz/(f(z)-z)}$. Si $u(t)$ es solución, $w(t) = u(\lambda t)/\lambda$ es también solución si $\lambda \neq 0$.

II.2.3. Ecuaciones en diferenciales totales. Factor integrante

Dada

$$\frac{du}{dt} = -\frac{f(t,u)}{g(t,u)}\,, \tag{II.2.19}$$

con $g(t,u) \neq 0$, podemos reescribir esta ecuación como

$$g(t,u)du + f(t,u)dt = 0\,. \tag{II.2.20}$$

Si se cumple que

$$\frac{\partial g(t,u)}{\partial t} = \frac{\partial f(t,u)}{\partial u}\,, \tag{II.2.21}$$

$\Rightarrow \exists\ \phi(t,u)$ tal que

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = g(t,u), \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = f(t,u) \tag{II.2.22}$$

y podemos reescribir (II.2.20) como la diferencial total

$$d\phi = g(t,u)du + f(t,u)dt = 0\,.$$

Las soluciones $u(t)$ de (II.2.19) quedan entonces determinadas implícitamente por la ecuación

$$\phi(t,u) = c\,, \tag{II.2.23}$$

con c constante. Si $u(t_0) = u_0 \Rightarrow c = \phi(t_0, u_0)$ y la solución particular queda determinada por

$$\phi(t,u) = \phi(t_0,u_0)\,. \tag{II.2.24}$$

La condición (II.2.21) es necesaria y suficiente para que el primer miembro de (II.2.20) sea la diferencial total de una función ϕ. Ésta puede obtenerse como la integral de línea

$$\phi(t,u) = \int_{(t_0,u_0)}^{(t,u)} [g(t',u')du' + f(t',u')dt'] + \phi_0 \tag{II.2.25}$$

a lo largo de cualquier curva que vaya desde (t_0, u_0) a (t, u) (dentro de una región simplemente conexa donde f y g estén definidas), con $\phi_0 = \phi(t_0, u_0)$ una constante arbitraria. Por ejemplo, eligiendo dos segmentos paralelos a los ejes coordenados,

$$\phi(t,u) = \int_{u_0}^{u} g(t_0, u')du' + \int_{t_0}^{t} f(t', u)dt' + \phi_0 \,. \tag{II.2.26}$$

Equivalentemente, puede integrarse $\frac{\partial \phi}{\partial u} = g(t, u) =$ para obtener

$$\phi(t,u) = \int g(t,u)du + c(t)$$

y determinar $c'(t)$ a partir de $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int g(t,u)\,du + c'(t) = f(t)$.

Una vez determinada $c'(t)$ puede obtenerse $c(t)$ por integración, a menos de una constante, que quedará determinada por la condición inicial.

Notemos que la solución (II.2.7) para variables separables corresponde a $\phi(t, u) = \int \frac{du}{g(u)} - \int f(t)dt$.

Ejemplo II.2.4:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2t+u}{2u+t} \,. \tag{II.2.27}$$

En este caso $g(t, u) = 2u + t$, $f(t, u) = 2t + u$, con $\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial t} = 1$. Podemos, entonces, escribir (II.2.27) como

$$d\phi = (2u+t)du + (2t+u)dt = 0 \,,$$

con

$$\begin{aligned} \phi(t,u) &= \int_{u_0}^{u} (2u' + t_0)du' + \int_{t_0}^{t} (2t' + u)dt' + \phi_0 \\ &= u^2 + ut + t^2 - (u_0^2 + u_0 t_0 + t_0^2) + \phi_0 \,. \end{aligned}$$

La solución $u(t)$ queda entonces determinada por

$$u^2 + ut + t^2 = c \,, \tag{II.2.28}$$

o sea,

$$u(t) = -\frac{1}{2}(t \pm \sqrt{4c - 3t^2}), \tag{II.2.29}$$

con $c = u_0^2 + u_0 t_0 + t_0^2$ y el signo determinado por $u(t_0) = u_0$. La solución sólo está definida para $t \in [-t_c, t_c]$, con $t_c = 2\sqrt{c/3}$, anulándose el denominador de (II.2.27) para $t = \pm t_c$ ($u(\pm t_c) = \mp t_c/2$). La gráfica de $u(t)$ es la parte superior o inferior de una elipse con centro en el origen, rotada 45^o (ver Fig. 4).

Notemos que la ecuación (II.2.27) es de la forma (II.2.17), con $f(z) = -(2+z)/(2z+1)$. Puede comprobar el lector que (II.2.18) conduce a la solución (II.2.28).

Factor integrante.

Si la ecuación (II.2.21) no se verifica, es aún posible convertir la ecuación (II.2.20) en una diferencial exacta multiplicando a la misma por una función $\mu(t,u)$, llamada factor integrante:

$$d\phi = \mu(t,u)g(t,u)du + \mu(t,u)f(t,u)dt = 0\,, \tag{II.2.30}$$

con

$$\frac{\partial(\mu g)}{\partial t} = \frac{\partial(\mu f)}{\partial u}\,. \tag{II.2.31}$$

Desarrollando la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial u} &= \mu^{-1}\left[f\frac{\partial \mu}{\partial u} - g\frac{\partial \mu}{\partial t}\right]\\ &= f\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial u} - g\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial t}\,,\end{aligned} \tag{II.2.32}$$

la cual es una ecuación en derivadas parciales para $\mu(t,u)$, que puede ser tan difícil de resolver como la ecuación original (puede demostrarse que si las derivadas de f y g son continuas y, por lo menos, f (ó g) es no nula, la ecuación anterior posee siempre una solución no nula). Sin embargo, en algunos casos, su resolución es sencilla. Por ejemplo, si $\mu(t,u)$ es función de t solamente, obtenemos

$$\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial t} = \left[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial t}\right]/g\,,$$

lo cual es factible sólo si el segundo miembro es función de t únicamente. En ese caso,

$$\mu(t) = c\exp\left[\int \frac{\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial t}}{g}\,dt\right]\,. \tag{II.2.33}$$

Podemos fijar $c = 1$, ya que la constante que multiplica a μ es irrelevante. En forma similar pueden considerarse factores integrantes que sean funciones de u, o en general, de alguna función de u y t. Una vez obtenido μ se procede como en el ítem anterior.

Ejemplo II.2.5:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u^2 + u(t+1) + t(t+2)}{2u+t}\,.$$

En este caso, $\frac{\partial f}{\partial u} = 2u + t + 1 \neq \frac{\partial g}{\partial t} = 1$. No obstante, $[\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial t}]/g = 1$ y, por lo tanto,

$$\mu(t) = e^{\int dt} = e^t\,,$$

verificándose $\frac{\partial(e^t f)}{\partial u} = \frac{\partial(e^t g)}{\partial t} = e^t(2u+t+1)$. Obtenemos, para este caso,

$$d\phi = e^t[(2u+t)du + (u^2 + u(t+1) + t(t+2))dt] = 0\,,$$

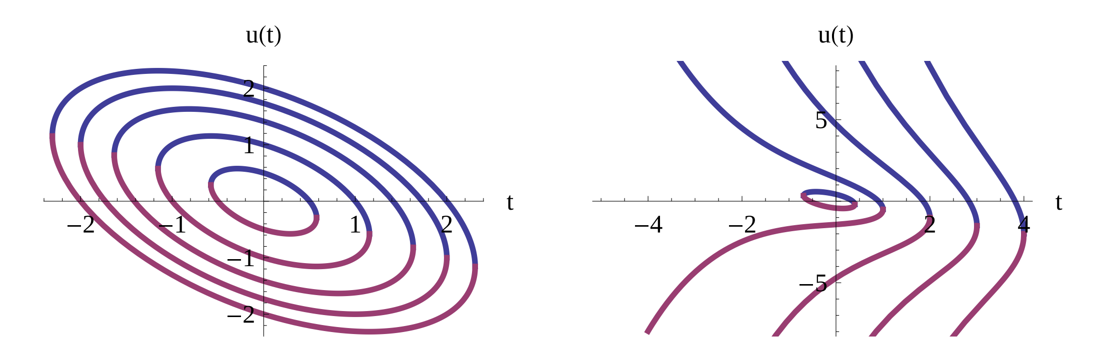


Figura 4: Gráfico de las curvas (II.2.28) (izquierda) y (II.2.34) (derecha) para distintos valores de c.

con $\phi(t,u) = e^t(u^2 + ut + t^2)$. La solución está, entonces, determinada por

$$(u^2 + ut + t^2)e^t = c\,, \tag{II.2.34}$$

o sea,

$$u = -\frac{1}{2}(t \pm \sqrt{4ce^{-t} - 3t^2}), \tag{II.2.35}$$

con $c = \phi(u_0, t_0) > 0$. La ecuación $\phi(t,u) = c$ origina una curva abierta si $c > c_c \approx 0{,}41$ y una curva cerrada más una abierta si $c < c_c$ (Fig. 4), estando las abscisas extremas de las mismas determinadas por la condición $3t^2 \leq 4ce^{-t}$.

II.2.4. Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Ecuación general lineal de primer orden. Método de variación de la constante.

Resolveremos ahora una ecuación diferencial lineal general de primer orden. Como hemos visto, corresponde al caso en que $f(t,u)$ en (II.2.1) es una función lineal de u:

$$\frac{du}{dt} = a(t) + b(t)u\,. \tag{II.2.36}$$

Podemos escribir (II.2.36) en la forma

$$L[u] = a(t), \quad L = \frac{d}{dt} - b(t)\,, \tag{II.2.37}$$

donde L es un operador *lineal*.

Consideremos, primero, $a(t) = 0$. En este caso, la ecuación (II.2.36) es *homogénea* y de variables separables:

$$\frac{du}{u} = b(t)dt\,,$$

de donde $\ln|u(t)| = \int b(t)dt + c'$, y entonces

$$u(t) = c\, e^{\int b(t)dt}\,, \tag{II.2.38}$$

con c arbitrario. Si $u(t_0) = u_0 \Rightarrow$ utilizando la primitiva de $b(t)$ que se anule en $t = t_0$ obtenemos

$$u(t) = u_0 e^{\int_{t_0}^{t} b(t')dt'}\,. \tag{II.2.39}$$

Si $a(t) \neq 0$ (caso inhomogéneo), podemos intentar una solución del tipo (II.2.38), pero con c una función de t a determinar:

$$u = u_h(t)\, c(t), \quad u_h(t) = e^{\int b(t)dt}\,. \tag{II.2.40}$$

Este procedimiento se denomina *variación de parámetros, o de constantes*. Se obtiene, notando que $L[u_h(t)] = 0$,

$$L[u] = L[u_h(t)]c(t) + u_h(t)\frac{dc}{dt} = u_h(t)\frac{dc}{dt} = a(t)\,.$$

Por lo tanto, $dc/dt = a(t)/u_h(t)$ y entonces,

$$c(t) = \int \frac{a(t)}{u_h(t)}dt + c'\,,$$

con c' una constante arbitraria. Reemplazando en (II.2.40), obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} u(t) &= u_h(t)[c' + \int \frac{a(t)}{u_h(t)}dt] \\ &= e^{\int b(t)dt}[c' + \int e^{-\int b(t)dt}a(t)dt]\,. \end{aligned} \tag{II.2.41}$$

La solución general es, pues, una solución de la ecuación homogénea ($u_h(t)c'$), más una solución particular de la inhomogénea. La solución particular que satisface $u(t_0) = u_0$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\int_{t_0}^{t} b(t')dt'}[u_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{t'} b(t'')dt''}a(t')dt'] \\ &= K(t,t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} K(t,t')a(t')dt'\,, \end{aligned} \tag{II.2.42}$$

donde

$$K(t,t') = e^{\int_{t'}^{t} b(t'')dt''} = u_h(t)/u_h(t')\,,$$

es la solución de la ecuación homogénea que satisface $u(t') = 1$, pues $K(t',t') = 1$.

La ecuación (II.2.41) puede también obtenerse por el método del factor integrante. En este caso $f = -[a(t) + b(t)u]$, $g = 1$ y $(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial t})/g = -b(t)$ es función de t, por lo que μ puede obtenerse de (II.2.33): $\mu(t) = ce^{-\int b(t)dt}$. Finalmente,

$$\phi(t,u) = \mu(t)u - \int \mu(t)a(t)dt\,.$$

La ecuación $\phi(t,u) = c$ conduce a (II.2.41).

Ejemplo II.2.6: La velocidad de una partícula de masa m en un medio viscoso con fuerza de roce proporcional a la velocidad $F_r = -\gamma v$ y bajo la acción de una fuerza externa $F(t)$, satisface la ecuación

$$m\frac{dv}{dt} = -\gamma v + F(t)\,, \qquad \text{(II.2.43)}$$

que puede escribirse como

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda v + f(t)\,,$$

donde $\lambda = \gamma/m > 0$ y $f(t) = F(t)/m$. Utilizando el resultado anterior, la solución general es entonces

$$v(t) = e^{-\lambda t}[c' + \int e^{\lambda t} f(t)dt]$$

y la solución para $v(t_0) = v_0$ puede escribirse como

$$v(t) = v_0 e^{-\lambda(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-\lambda(t-t')} f(t')dt'\,,$$

que corresponde a $K(t_2, t_1) = e^{-\lambda(t_2-t_1)}$.

Por ejemplo, si

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0\,,\ \text{y}\ \ t > t_c \\ f_0\,, & 0 \le t \le t_c \end{cases}$$

se obtiene, para $t_0 = 0$, $v_0 = 0$,

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ (f_0/\lambda)(1 - e^{-\lambda t}) & 0 \le t \le t_c \\ (f_0/\lambda)(1 - e^{-\lambda t_c})e^{-\lambda(t-t_c)} & t > t_c \end{cases}\,. \qquad \text{(II.2.44)}$$

La solución para $t > t_c$ es obviamente la solución de la ecuación homogénea para $t_0 = t_c$ y $v(t_c) = (f_0/\lambda)(1 - e^{-\lambda t_c})$.

Observemos que si $f_0 \to \infty$ y $t_c \to 0$, con $f_0 t_c \to J$ (finito), entonces $v(t_c) \to J$. Esto corresponde justamente a una fuerza actuando sólo en $t = 0$ que suministra un impulso J.

Notemos también que si $f(t) = f_0\ \forall t > 0$ ($t_c \to \infty$), $v(t) = (f_0/\lambda)(1 - e^{-\lambda t})\ \forall t > 0$, con $v(t) \to f_0/\lambda$ *(velocidad límite)* para $t \to \infty$.

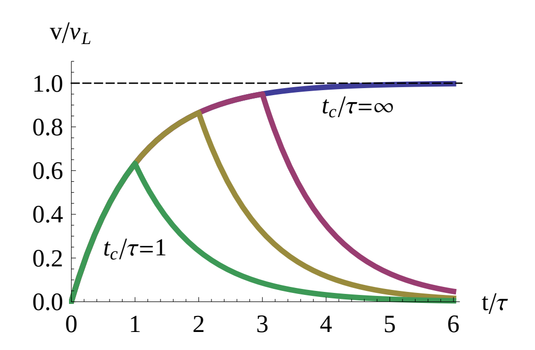


Figura 5: Gráfico de la solución (II.2.44) para distintos valores de t_c, con $\tau = \lambda^{-1}$ y $v_L = f_0\tau$ la velocidad límite para $t_c = \infty$ (fuerza externa constante).

Ejemplo II.2.7: La corriente I de un circuito eléctrico con autoinducción L, resistencia R y tensión $V(t)$ satisface una ecuación completamente similar:

$$L\frac{dI}{dt} + IR = V(t)\,.$$

Es decir, cambiando $v \to I$, $m \to L$, $\gamma \to R$ y $F(t) \to V(t)$. La solución para $I(0) = I_0$ y L, R constantes, es entonces

$$I(t) = I_0 e^{-Rt/L} + \int_0^t e^{-R(t-t')/L} V(t')dt'\,.$$

Este es un típico ejemplo de analogía física, en el que sistemas y magnitudes diferentes son descriptos por una misma ecuación diferencial, exhibiendo entonces comportamientos análogos. Resulta así posible simular el movimiento de la masa en el medio viscoso sujeta a una fuerza externa $f(t)$ mediante un circuito LR con $R/L = \gamma/m$, $V(t)/L = F(t)/m$, o viceversa.

II.2.5. Ecuaciones reducibles a la forma lineal

Algunas ecuaciones pueden ser reducidas a ecuaciones lineales mediante un sencillo cambio de variables. Un ejemplo conocido es la ecuación de Bernoulli,

$$\frac{du}{dt} = a(t)u^n + b(t)u, \quad n \neq 1\,.$$

Sustituyendo $z = u^{1-n}$, obtenemos

$$\begin{aligned} n\frac{dz}{dt} = (1-n)u^{-n}\frac{du}{dt} &= (1-n)u^{-n}[a(t)u^n + b(t)u] \\ &= (1-n)[a(t) + b(t)z]\,, \end{aligned}$$

que es una ecuación lineal en z.

En general, si $u = g(z)$, con g invertible, y z satisface la ecuación lineal

$$dz/dt = a(t) + b(t)z,$$

u satisface la ecuación no lineal

$$\frac{du}{dt} = g'(z)\frac{dz}{dt} = g'(g^{-1}(u))[a(t) + b(t)g^{-1}(u)]\,,$$

que posee la solución $u(t) = g(z(t))$, con $z(t)$ la solución de la ecuación lineal. Por ejemplo, si $u = z^{1/(1-n)}$, $\frac{du}{dt} = \frac{1}{1-n}[a(t)u^n + b(t)u]$, que es la ecuación de Bernoulli. Análogamente, si $u = e^z$,

$$\frac{du}{dt} = a(t)u + b(t)u\ln u\,,$$

cuya solución es $e^{z(t)}$ mientras que, si $u = \ln z$,

$$\frac{du}{dt} = a(t)e^{-u} + b(t)\,,$$

cuya solución es $\ln z(t)$.

Destaquemos finalmente por qué es tan importante el caso lineal, cuando a primera vista parecería tratarse de un caso muy particular. En el caso general, dado por la ecuación (II.2.1), si la función $f(t, u)$ es suficientemente suave como para admitir un desarrollo en serie de Taylor en la variable u (alrededor de cierto valor u_0), tendremos:

$$f(t, u) \approx f(t, u_0) + f_u(t, u_0)(u - u_0)$$

donde $f_u(t, u_0) = \partial f/\partial u|_{u=u_0}$. Es decir que, para $|u - u_0|$ suficientemente pequeño, como ocurre al estudiar pequeños desplazamientos respecto a un punto de equilibrio u_0 (en el que $f(t, u_0) = 0$), podemos aproximar $f(t, u)$ por una función *lineal* en u, y obtener así una ecuación diferencial lineal que es exactamente resoluble. Esta solución analítica aproximada puede darnos información muy útil acerca del problema original. Por ejemplo, nos puede indicar, en forma analítica, cómo se comporta el sistema para pequeños apartamientos del equilibrio y determinar así si el equilibrio es estable o inestable. Veremos en la sección (II.3.4) un ejemplo específico de esta aproximación en el caso del péndulo simple.

II.3. Problemas de condiciones iniciales

II.3.1. Teorema de existencia y unicidad de Picard para problemas de valores iniciales

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{du}{dt} = f(t, u)\,, \qquad \text{(II.3.1)}$$

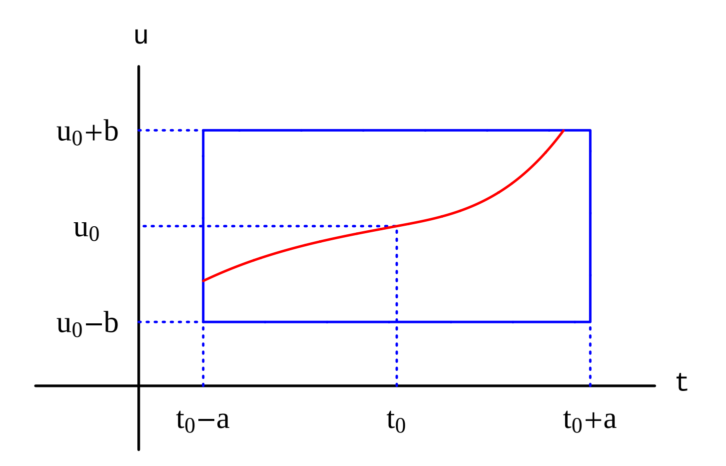


Figura 6: El rectángulo R

con la condición inicial $u(t_0) = u_0$. Salvo casos especiales, como los vistos antes, no es posible, en general, resolver este problema en forma analítica. Es necesario, entonces, recurrir a métodos *aproximados*, que permiten resolverlo en forma numérica. Para ello, se necesita, primero, estar seguro de que, efectivamente, *existe* una solución de (II.3.1) para una determinada f y condición inicial. El siguiente teorema demuestra que dicha solución *existe y es única* para una clase muy amplia de funciones. A la vez, el teorema proporciona un *método de resolución aproximado* de (II.3.1) (método de Picard).

Teorema II.3.1 *Si $f(t,u)$ es continua en un rectángulo R dado por $|t-t_0| \leq a$, $|u-u_0| \leq b$, y satisface en R la condición de Lipschitz*

$$|f(t,u_2) - f(t,u_1)| \leq N|u_2 - u_1|\,, \tag{II.3.2}$$

con N constante, entonces, en el intervalo

$$|t-t_0| \leq r, \quad r = \text{Min}[a, b/M]\,, \tag{II.3.3}$$

con M el valor máximo de $|f|$ en R, existe una única solución $u(t)$ de (II.3.1) que satisface $u(t_0) = u_0$.

La condición $|t-t_0| \leq r$ asegura que la solución no salga de R. En efecto (ver figura 7), dado que $|f| \leq M$ en R, si $|t-t_0| \leq r$, integrando (II.3.1) y tomando valor absoluto, se obtiene

$$|u(t) - u_0| = |\int_{t_0}^{t} f(t', u(t'))dt'| \leq |\int_{t_0}^{t} |f(t', u(t'))|dt'| \leq M|t-t_0| \leq Mr = b\,.$$

Observar que, para que se cumpla la condición de Lipschitz (II.3.2), es suficiente que $f_u = \frac{\partial f}{\partial u}$ exista y esté acotada en R dado que, por el teorema del valor medio, si $|f_u| \leq N$ en R,

$$|f(t,u_2) - f(t,u_1)| = |f_u(t,\xi)(u_2 - u_1)| \leq N|u_2 - u_1|$$

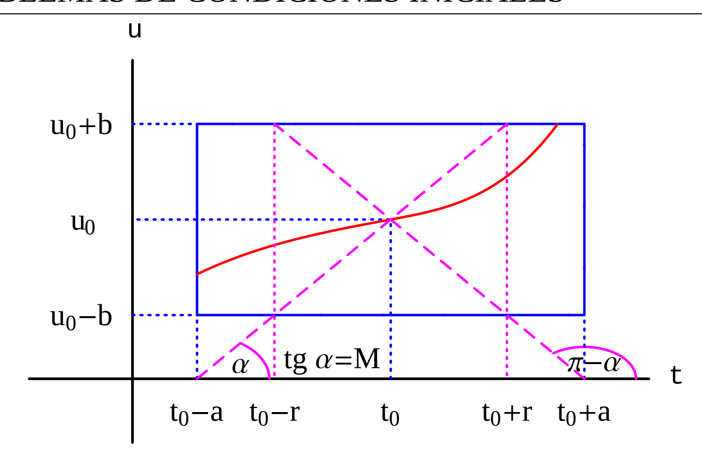


Figura 7: Definición de r

con $\xi \in [u_1, u_2]$.

Demostración:

Demostraremos primero la **existencia** *de la solución. La ecuación (*II*.3.1) es equivalente a la ecuación integral*

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(t', u(t'))dt' \,. \tag{II.3.4}$$

Podemos plantear ahora una secuencia de aproximaciones sucesivas $u_0, u_1(t), \ldots, u_n(t)$ *definidas por*

$$u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(t', u_{n-1}(t'))dt', \quad n \geq 1 \,, \tag{II.3.5}$$

con $u_0(t) = u_0$ *(método de Picard). La restricción (*II*.3.3) asegura que* $u_n(t)$ *no sale de* R *para ningún* n *(o sea,* $|u_n(t) - u_0| \leq b$ *si* $|t - t_0| \leq r$*). En efecto, para* $n = 0$ *esto se cumple trivialmente. Asumiendo que se cumple para* $u_{n-1}(t)$*, obtenemos, dado que* $|f| \leq M$ *en* R*,*

$$|u_n(t) - u_0| \leq \int_{t_0}^{t} |f(t', u_{n-1}(t'))|dt' \leq M|t - t_0| \leq b \tag{II.3.6}$$

para $|t - t_0| \leq r$.

*Probaremos ahora que la sucesión (*II*.3.5) converge. Si* $n \geq 1$ *y* $|t-t_0| \leq r$*,*

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(t)-u_n(t)| &= |\int_{t_0}^{t}[f(t',u_n(t'))-f(t',u_{n-1}(t'))]dt'| \\ &\leq |\int_{t_0}^{t}|f(t',u_n(t'))-f(t',u_{n-1}(t'))|dt'| \\ &\leq N|\int_{t_0}^{t}|u_n(t')-u_{n-1}(t')|dt'| \end{aligned} \tag{II.3.7}$$

Para $n=1$*, (*II*.3.6) implica que*

$$|u_1(t)-u_0| \leq M|t-t_0|\,.$$

*Por lo tanto, (*II*.3.7) conduce a*

$$|u_2(t)-u_1(t)| \leq NM|\int_{t_0}^{t}|t'-t_0|dt'| = MN\frac{|t-t_0|^2}{2}$$

y para n *general, a*

$$|u_n(t)-u_{n-1}(t)| \leq \frac{MN^{n-1}|t-t_0|^n}{n!}\,. \tag{II.3.8}$$

Entonces, $|u_{n+1}(t)-u_n(t)| \leq MN^n\ |\int_{t_0}^{t}\frac{|t'-t_0|^n}{n!}dt'| = MN^n\frac{|t-t_0|^{n+1}}{(n+1)!}$ *y, por lo tanto,* $\lim\limits_{n\to\infty}|u_{n+1}(t)-u_n(t)|=0$*. Además, como*

$$u_n(t) = u_0 + (u_1(t)-u_0) + \ldots + (u_n(t)-u_{n-1}(t))\,,$$

el límite

$$u(t) \equiv \lim_{n\to\infty} u_n(t) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(u_n(t)-u_{n-1}(t)) \tag{II.3.9}$$

existe, pues la serie de diferencias es una serie absolutamente convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(t)-u_{n-1}(t)| \leq M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N^{n-1}|t-t_0|^n}{n!} = M\frac{e^{N|t-t_0|}-1}{N}\,.$$

La convergencia es también uniforme por el criterio de Weierstrass (si $|f_n(t)| \leq M_n$ $\forall\ t \in I=[t_1,t_2]$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *converge* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ *converge uniformemente sobre* I *a una función* $f(t)$*; recordemos que la convergencia es uniforme si* $\forall\ \varepsilon > 0$*,* $\exists\ n_0$ *t.q. si* $n > n_0$*,* $|f(t)-f_n(t)| < \varepsilon\ \forall\ t \in I$*).*

*Por lo tanto, el límite de la integral en (*II*.3.5) es la integral del límite, de modo que* $u(t)$ *es solución de (*II*.3.1). Notemos que* $u(t)$ *es un punto fijo del operador* $A[u(t)] = u_0+$

$\int_{t_0}^{t} f(t', u(t'))dt'$, *(es decir* $u(t) = A[u(t)]$*), el cual transforma funciones* $u(t)$ *contenidas en* R *en funciones* $A[u(t)]$ *también contenidas en* R *si* $|t - t_0| \leq r$.

Demostremos ahora la **unicidad**. *Si* $v(t)$ *es otra solución de (*II*.3.1) que satisface* $v(t_0) = u_0$, *entonces, para* $|t - t_0| \leq r$,

$$\begin{aligned} |u(t) - v(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(t', u(t')) - f(t', v(t'))|dt' \\ &\leq N \int_{t_0}^{t} |u(t') - v(t')|dt' \leq KN|t - t_0| \end{aligned}$$

donde K *es el máximo de* $|u(t) - v(t)|$ *para* $|t - t_0| \leq r$. *Esto implica* $|u(t) - v(t)| = 0$ *para* $|t - t_0| \leq r$. *En efecto, aplicando la cota anterior para* $|u(t') - v(t')|$, *obtenemos*

$$|u(t) - v(t)| \leq KN^2 \int_{t_0}^{t} |t' - t_0|dt' = KN^2 \frac{|t - t_0|^2}{2}$$

y, repitiendo el procedimiento anterior n *veces,*

$$|u(t) - v(t)| \leq K \frac{(N|t - t_0|)^n}{n!}, \tag{II.3.10}$$

que tiende a 0 *para* $n \to \infty$.

□

Ejemplo II.3.1: Consideremos nuevamente la ecuación lineal

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u$$

Aplicando el método de Picard para $t_0 = 0$, con $u(t_0) = u_0$, obtenemos

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - \lambda \int_0^t u_0 dt' = u_0[1 - \lambda t] \\ u_2 &= u_0 - \lambda \int_0^t u_1(t')dt' = u_0[1 - \lambda t + \lambda^2 t^2/2] \end{aligned}$$

y, en general, $u_n = u_0 \sum_{m=0}^{n} \frac{(-\lambda t)^m}{m!}$, de modo que

$$u(t) = \lim_{n \to \infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda t)^n}{n!} = u_0 e^{-\lambda t}.$$

La serie anterior converge $\forall\, t$, pero la condición (II.3.3) proporciona una estimación muy conservadora del intervalo de convergencia: Para $u_0 > 0$, $M = |\lambda|(b + u_0)$ y

$$r = \text{Min}[a, \frac{b}{|\lambda|(u_0 + b)}] \leq \frac{1}{|\lambda|}$$

si $a > |\lambda|^{-1}$, ya que $b/(u_0+b) < 1 \,\forall\, b > 0$. En general, el intervalo (II.3.3) es demasiado restrictivo y el desarrollo de Picard converge en un intervalo mayor.

Ejemplo II.3.2: Consideremos ahora

$$\frac{du}{dt} = -\lambda u^2$$

con $t_0 = 0$. Obtenemos

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - \lambda\int_0^t u_0^2 dt' = u_0(1-\lambda u_0 t) \\ u_2 &= u_0 - \lambda\int_0^t u_1^2(t')dt' = u_0[1-\lambda u_0 t+(\lambda u_0 t)^2 - \frac{(\lambda u_0 t)^3}{3}] \\ u_3 &= u_0[\sum_{n=0}^{3}(-\lambda u_0 t)^n + R_4(\lambda u_0 t)]\,, \end{aligned}$$

donde $R_4(x) = \frac{1}{3}x^4(2 - x + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{63}x^3)$. En general,

$$u_n(t) = u_0[\sum_{m=0}^{n}(-\lambda u_0 t)^m + R_{n+1}(\lambda u_0 t)]\,,$$

con $R_{n+1}(x) = O(x^{n+1})$. Para $n \to \infty$, la solución converge, para $|\lambda u_0 t| < 1$, a

$$u(t) = \frac{u_0}{1+\lambda u_0 t}\,, \qquad \text{(II.3.11)}$$

que coincide con la solución (II.2.13). Si $\lambda > 0$ (con $u_0 > 0$) la solución final (II.3.11) es válida $\forall\ t > 0$, aunque el desarrollo de Picard converge sólo para $|t| < |\lambda u_0|^{-1}$. En cambio, si $\lambda < 0$ la solución existe sólo para $t < |\lambda u_0|^{-1}$, que coincide con el radio de convergencia del desarrollo. Notemos que la condición (II.3.3) da, en este caso,

$$r = \text{Min}[a, \frac{b}{|\lambda|(u_0+b)^2}] \leq \frac{1}{4|\lambda|u_0}\,,$$

dado que $b/(u_0+b)^2 < \frac{1}{4u_0}$, que es nuevamente menor que el radio de convergencia de la serie.

Otras propiedades

Resulta obvio a partir de (II.3.1) que, si $f(t,u)$ posee derivadas parciales continuas hasta orden k en un entorno de (t_0, u_0), la solución $u(t)$ posee derivadas continuas hasta orden $k+1$ en un entorno de t_0.

Puede probarse también que, si f depende en forma continua de un parámetro λ (o sea, $\frac{du}{dt} = f(t,u,\lambda)$) y satisface las condiciones del teorema de unicidad, con N en (II.3.2)

independiente de $\lambda \Rightarrow$ la solución $u(t,\lambda)$ depende en forma *continua* de λ para $|t - t_0| \leq r$ (lo mismo vale para un conjunto de parámetros). En particular, esto implica que $u(t)$ dependerá en forma *continua* de la condición inicial $u(t_0) = u_0$. En efecto, escribiendo $v = u - u_0$, $s = t - t_0$, tenemos $\frac{dv}{ds} = f(s + t_0, v + u_0) = g(s, v)$, con $v(0) = 0$, donde los valores iniciales quedan representados por parámetros de la función g. De todos modos, esto no impide que dos soluciones con condiciones iniciales cercanas se alejen mucho para valores grandes de $|t - t_0|$. Por ejemplo, los sistemas caóticos son extremadamente sensibles a las condiciones iniciales. En los mismos, si dos soluciones $u_1(t)$, $u_2(t)$ difieren inicialmente en una pequeña cantidad δu_0, para tiempos grandes $|u_1(t) - u_2(t)| \approx |\delta u_0| e^{\Lambda t}$, donde $\Lambda > 0$ es el llamado *exponente de Lyapunov*.

Extensión de la solución

Si bien el teorema demuestra la existencia de solución para $|t - t_0| \leq r$ la misma puede, en principio, extenderse fuera de este intervalo tomando como nuevos puntos iniciales a $t_0 \pm r$. No obstante, como hemos visto no siempre es posible continuar la solución indefinidamente. Esto puede deberse a que la solución se acerca a un punto donde las condiciones del teorema no se cumplen o también a que la solución se aproxima a una asíntota vertical ($\lim_{t \to t_c} u(t) = \pm\infty$), como ocurre en (II.3.11) para $\lambda u_0 < 0$ ($t_c = |\lambda u_0|^{-1}$). Un ejemplo del primer caso es la solución (II.2.29) de la ecuación (II.2.27), limitada al intervalo $|t| < t_c = \sqrt{4c/3}$. Si $t = t_c$, $u(t) = -\frac{1}{2}t$, anulándose el denominador de (II.2.27).

Puntos singulares

Los puntos (t_0, u_0) en los que, o bien no existe solución de (II.3.1) o la solución no es única, se denominan *puntos singulares*. Obviamente, en estos puntos no se satisfacen las condiciones del teorema de unicidad, aunque no todo punto en el que las mismas no se cumplan es singular. Los condiciones del teorema son suficientes pero no necesarias. Por ejemplo, puede demostrarse que, si f es continua en un entorno de (t_0, u_0), existe siempre una solución de (II.3.1), pero ésta puede no ser única si no se cumple la condición de Lipschitz. La curva formada por los puntos singulares se denomina *curva singular*. Una solución formada enteramente por puntos singulares se denomina *solución singular*.

Ejemplo II.3.3:

$$\frac{du}{dt} = q\frac{u}{t}, \quad q > 0\,. \tag{II.3.12}$$

En este caso $f(t, u)$ no es continua en $t = 0$. Una solución de (II.3.12) es obviamente $u(t) = 0$. Además, si $u(t) \neq 0$, integrando por separación de variables obtenemos

$$\ln|u| = q \ln|t| + c'$$

o sea, si $t > 0$,

$$u(t) = c\, t^q\,. \tag{II.3.13}$$

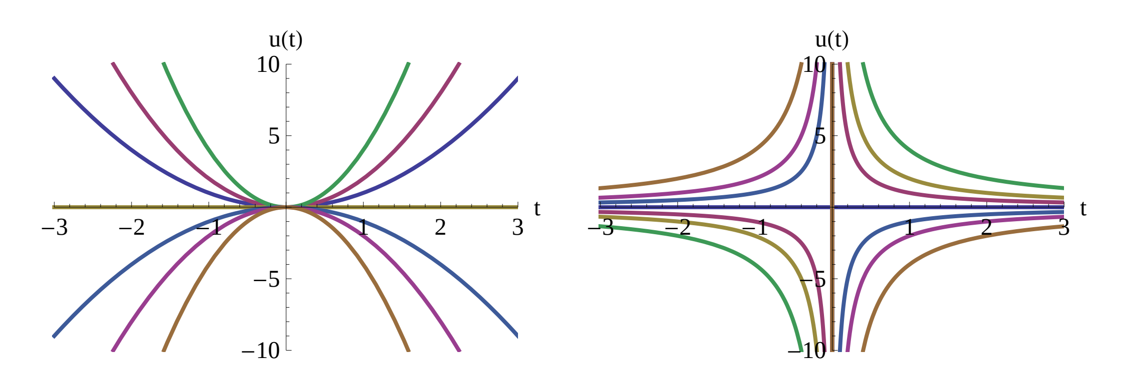


Figura 8: Gráficas de las soluciones (II.3.13) para $q = 2$ (izquierda) y $q = -1$ (derecha), y $c = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Si $t_0 > 0$, existe una única solución que satisface $u(t_0) = u_0$, $\forall\, u_0$ ($c = u_0/t_0^q$). Pero cuando consideramos $t_0 = 0$, vemos que si la condición inicial es $u_0 = 0$, (II.3.13) es solución de (II.3.12) *para cualquier valor de* c (incluyendo $c = 0$). No existe pues solución única para $u(0) = 0$, existiendo en cambio infinitas soluciones. Por el contrario, si $t_0 = 0$ y $u_0 \neq 0$, no existe ninguna solución. Este tipo de punto singular se denomina nudo (Fig. 8).

Si consideramos, ahora, $q < 0$ en (II.3.12), $u(t)$ no permanece finito para $t \to 0$, excepto para $c = 0$ (Fig. 8). Si $t_0 = 0$, para $u_0 = 0$ obtenemos, en este caso, una única solución $u(t) = 0$, mientras que, si $u_0 \neq 0$, no existe solución.

Ejemplo II.3.4:

$$\frac{du}{dt} = \lambda\sqrt{u}, \qquad \lambda \neq 0\,. \tag{II.3.14}$$

Para $u \to 0^+$, si bien $\sqrt{u}$ es continua, no se cumple la condición de Lipschitz pues $f_u = \frac{\lambda}{2\sqrt{u}} \to \infty$. Los puntos $(t, u) = (t, 0)$ pueden ser pues puntos singulares. Por separación de variables, para $u > 0$ obtenemos la solución

$$u(t) = \frac{1}{4}(\lambda t + c)^2, \qquad \lambda t + c > 0 \tag{II.3.15}$$

No obstante, tenemos también la solución trivial

$$u(t) = 0\,, \tag{II.3.16}$$

que no se obtiene de (II.3.15) (Ver Fig. 9).

Si $t_0 = 0$ y $u_0 > 0$, obtenemos como única solución

$$u(t) = \frac{1}{4}(2\sqrt{u_0} + \lambda t)^2, \tag{II.3.17}$$

donde el paréntesis debe ser positivo. La solución (II.3.17) está definida $\forall\, t > 0$ si $\lambda > 0$, pero sólo para $t \leq t_c = 2\sqrt{u_0}/|\lambda|$ si $\lambda < 0$. En este caso, $u(t) \to 0$ para $t \to t_c$, y no

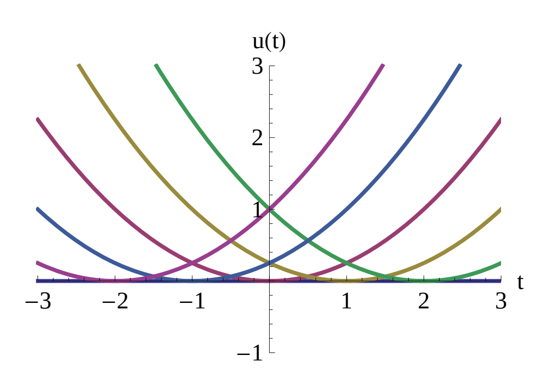


Figura 9: Gráficas de las soluciones (II.3.15) para $\lambda = 1$ (curvas crecientes) y $\lambda = -1$ (curvas decrecientes), y $c = 0, \pm 1, \pm 2$, junto con la solución singular $u(t) = 0\, \forall\, t$.

puede extenderse para $t > t_c$. Si $\lambda < 0$, la solución disminuye pues más rapidamente que en el caso lineal ($\frac{du}{dt} = \lambda u$, con $u(t) = u_0 e^{-|\lambda| t}$ si $\lambda < 0$) "apagándose" en un tiempo *finito*.

Consideremos, ahora, $u_0 = 0$. La ecuación (II.3.17) se reduce a

$$u(t) = \frac{1}{4}\lambda^2 t^2\,. \tag{II.3.18}$$

Si $\lambda > 0$, (II.3.18) es solución de (II.3.14) y satisface $u(0) = 0$, al igual que (II.3.16). Por lo tanto, la solución *no es única*. Lo mismo ocurre obviamente para cualquier valor de t_0. Los puntos $(0, t)$ son pues singulares y la solución trivial (II.3.16) es una solución *singular*. Por el contrario, si $\lambda < 0$ (II.3.18) no es solución de (II.3.14), obteniéndose como única solución, para $u_0 = 0$ y $t > 0$, la solución trivial (II.3.16).

Soluciones aproximadas

Si bien no vamos a tratar el tema de aproximaciones numéricas, cabe destacar que existen también otras sucesiones $u_n(t)$ que convergen uniformemente a la solución $u(t)$ y que pueden, por lo tanto, utilizarse para aproximar la solución. El método más elemental y conocido es el método de la "quebrada de Euler", que consiste en subdividir el intervalo $[t_0, t_0 + r]$ en n subintervalos de longitud $h = r/n$, y aproximar la solución $u(t)$ por segmentos entre los puntos (t_0, u_0), (t_1, u_1), ..., (t_n, u_n) definidos por

$$t_i = t_{i-1} + h, \quad u_i = u_{i-1} + h f(t_{i-1}, u_{i-1}), \quad i = 1, \ldots, n\,,$$

que se obtienen de suponer $f(t, u(t)) = f(t_{i-1}, u_{i-1})$ (constante) en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Cada segmento es, entonces, tangente a la solución exacta en (t_{i-1}, u_{i-1}). Puede mostrarse que tal aproximación converge, para $h \to 0$ (o sea, $n \to \infty$), a la solución exacta $u(t)$ si se cumplen las condiciones del teorema de existencia. Refinamientos del método anterior conducen a aproximar $u(t)$ por una sucesión de polinomios de grado m entre puntos (t_i, u_i), tales que posean un contacto de orden m con la solución exacta en dichos puntos (métodos de Störmer, Runge, etc.). Estos métodos están directamente incorporados en diversos programas de cálculo numérico o analítico (por ejemplo [11]), siendo muy sencilla y rápida su utilización.

II.3.2. Generalización a sistemas de ecuaciones de primer orden

Consideremos ahora el sistema de ecuaciones acopladas

$$\frac{du_i}{dt} = f_i(t, u_1, \ldots, u_n), \quad i = 1, \ldots, n\,, \tag{II.3.19}$$

donde la derivada de cada variable u_i depende de t, de sí misma y y de todas las demás variables. El teorema de existencia y unicidad se generaliza en forma inmediata a este tipo de sistemas. Podemos reescribir (II.3.19) en forma concisa como

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u})\,, \tag{II.3.20}$$

con

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ u_n(t) \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} f_1(t, \boldsymbol{u}) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(t, \boldsymbol{u}) \end{pmatrix}\,,$$

y vale el siguiente teorema:

Teorema II.3.2 *Dado el sistema de ecuaciones lineales de primer orden*

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u})\,, \tag{II.3.21}$$

con condición inicial $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u_0}$, si existe una región R definida por $|t – t_0| \leq a$, $|\boldsymbol{u} – \boldsymbol{u_0}| \leq b$, donde se cumplen las condiciones

a) $f_i(t, \boldsymbol{u})$ continua en R,
b) $|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u_2}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u_1})| \leq N|\boldsymbol{u_2} - \boldsymbol{u_1}|$,

entonces existe una única solución $\boldsymbol{u}(t)$ de (II.3.21), que satisface $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u_0}$, dentro del intervalo

$$|t - t_0| \leq r = \mathrm{Min}[a, b/M]\,,$$

donde M es el máximo de $|\boldsymbol{f}|$ en R.

Para que se cumpla la condición de Lipschitz es suficiente que las derivadas parciales $f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}$ sean acotadas en R pues, en tal caso, por el teorema del valor medio,

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u_2}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u_1})|^2 &= \sum_i |f_i(t, \boldsymbol{u_2}) - f_i(t, \boldsymbol{u_1})|^2 \\ = \quad &\sum_i |\sum_j f_{ij}(t, \boldsymbol{\xi}_i)(u_{2j} - u_{1j})|^2 \\ &\leq \sum_i (\sum_j N_{ij}|u_{2j} - u_{1j}|)^2 \leq N^2|\boldsymbol{u_2} - \boldsymbol{u_1}|^2\,. \end{aligned} \tag{II.3.22}$$

La demostración del teorema es exactamente igual a la ya presentada en el caso de una ecuación. Sólo se deben reemplazar f, u y v en (II.3.4)–(II.3.10) por $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

□

II.3.3. Representación de una ecuación diferencial de orden n mediante un sistema de primer orden

La generalización del Teorema de Picard anterior es muy poderosa, porque:

i) *Toda ecuación diferencial ordinaria de orden n para una función $u(t)$ puede escribirse como un sistema de n ecuaciones de primer orden,*
ii) *todo sistema de m ecuaciones diferenciales de orden n para m funciones $u_1(t), \ldots, u_m(t)$ puede escribirse como un sistema de $m \times n$ ecuaciones de primer orden*

En efecto, la ecuación diferencial ordinaria *de orden* n,

$$\frac{d^n u}{dt^n} = f(t, u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}) \tag{II.3.23}$$

puede reducirse a un sistema de n ecuaciones ordinarias de primer orden de la forma (II.3.21) definiendo

$$u_1 = u,\ u_2 = \frac{du}{dt}, \ldots, u_n = \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}\,, \tag{II.3.24}$$

ya que

$$\frac{du_1}{dt} = u_2,\ \frac{du_2}{dt} = u_3, \ldots, \frac{du_n}{dt} = f(t, u_1, \ldots, u_n)\,, \tag{II.3.25}$$

o sea, $f_1(t, \boldsymbol{u}) = u_2$, $f_2(t, \boldsymbol{u}) = u_3$, ..., $f_n(t, \boldsymbol{u}) = f(t, \boldsymbol{u})$.

Entonces, si f satisface las condiciones del teorema, queda garantizada *la existencia y unicidad* de la solución de (II.3.23) para la condición inicial $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$, donde

$$\boldsymbol{u}_0 = (u(0), \frac{du}{dt}|_{t=0}, \ldots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}|_{t=0})$$

es el vector que contiene los valores iniciales de la "posición", "velocidad", "aceleración", etc.

En forma análoga, un sistema de m ecuaciones diferenciales acopladas de orden n,

$$\frac{d^n \boldsymbol{u}}{dt^n} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u}, \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}\boldsymbol{u}}{dt^{n-1}}) \tag{II.3.26}$$

donde $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_m)$, puede reducirse a un sistema de $m \times n$ ecuaciones de primer orden, definiendo los n vectores

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}_2 = \frac{d\boldsymbol{u}}{dt}, \ldots, \boldsymbol{u}_n = \frac{d^{n-1}\boldsymbol{u}}{dt^{n-1}}\,,$$

ya que
$$\frac{d\boldsymbol{u}_1}{dt}=\boldsymbol{u}_2,\ \frac{d\boldsymbol{u}_2}{dt}=\boldsymbol{u}_3,\ldots,\frac{d\boldsymbol{u}_n}{dt}=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n)\,,$$
lo cual constituye un sistema de $m\times n$ ecuaciones de primer orden para el vector ampliado $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n)$ de $m\times n$ coordenadas.

Así, la ecuación que describe el movimiento de una partícula en el espacio tridimensional sujeta a una fuerza $\boldsymbol{F}(t,\boldsymbol{r},d\boldsymbol{r}/dt)$, es, según la segunda ley de Newton, un sistema de 3 ecuaciones diferenciales de segundo orden en $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, lo que equivale a un sistema de 6 ecuaciones diferenciales de primer orden en las variables $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}=d\boldsymbol{r}/dt)$. Análogamente, la ecuación que describe el movimiento de n partículas en el espacio tridimensional, sujetas a fuerzas $\boldsymbol{F}_i(t,\boldsymbol{r}_1,d\boldsymbol{r}_1/dt,\ldots,\boldsymbol{r}_n,d\boldsymbol{r}_n/dt)$, es un sistema de $3n$ ecuaciones diferenciales de segundo orden para las $3n$ coordenadas $\boldsymbol{r}_i=(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,\ldots,n$, lo que equivale a un sistema de $6n$ ecuaciones diferenciales de primer orden en las variables $(\boldsymbol{r}_i,\boldsymbol{v}_i=d\boldsymbol{r}_i/dt)$, $i=1,\ldots,n$.

II.3.4. Reducción en uno del orden de una ecuación diferencial ordinaria

Antes de comenzar a estudiar en detalle la resolución de sistemas de ecuaciones de primer orden, es importante destacar que en algunos casos es posible reducir el orden sin introducir nuevas variables. Consideremos la ecuación de segundo orden
$$\frac{d^2u}{dt^2}=f(t,u,\frac{du}{dt}).$$
Hemos visto que podemos transformarla en un sistema de dos ecuaciones de primer orden definiendo $u_1=u$, $u_2=\frac{du}{dt}$, con $\frac{du_1}{dt}=u_2$, $\frac{du_2}{dt}=f(t,u_1,u_2)$. Por ejemplo,
$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F(t,x,\frac{dx}{dt})$$
puede escribirse como
$$m\frac{dx}{dt}=p,\quad \frac{dp}{dt}=F(t,x,p/m).$$
No obstante, en algunos casos es posible reducir el orden mediante técnicas elementales sin introducir nuevas variables. Por ejemplo, si f no depende de u,
$$\frac{d^2u}{dt^2}=f(t,\frac{du}{dt})$$
puede llevarse a la ecuación de primer orden
$$\frac{dw}{dt}=f(t,w)$$
definiendo $w=\frac{du}{dt}$. Si la solución es $w(t,c)$, donde c es una constante de integración, entonces $u(t)=\int w(t,c)dt+c'$.

Otro caso simple es aquél en que f no depende de la variable independiente,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f(u, \frac{du}{dt}).$$

Definiendo $w = \frac{du}{dt}$, y considerando a w como función de u, tenemos

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{du}\frac{du}{dt} = w\frac{dw}{du}$$

y, por lo tanto,

$$w\frac{dw}{du} = f(u, w),$$

que es una ecuación de primer orden. Si la solución es $w(u, c)$, podemos hallar $u(t)$ de $dt = du/w(u, c)$, o sea,

$$t - t_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{w(u, c)},$$

que determina $u(t)$ implícitamente. Este resultado es útil para fuerzas que dependen sólo de la posición, en cuyo caso el mismo resultado puede obtenerse directamente de consideraciones energéticas.

El mismo procedimiento es también válido para reducir en 1 el orden de la ecuación diferencial

$$\frac{d^nu}{dt^n} = f(u, \frac{du}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}).$$

Tenemos por ejemplo, $\frac{du}{dt} = w$, $\frac{d^2u}{dt^2} = w\frac{dw}{du}$,
$\frac{d^3u}{dt^3} = w\frac{d}{du}[w\frac{dw}{du}] = w[(\frac{dw}{du})^2 + w\frac{d^2w}{du^2}]$, y en general, $\frac{d^nu}{dt^n}$ será una función de las derivadas hasta orden $n-1$ de w respecto de u. Se llega a una ecuación del tipo

$$\frac{d^{n-1}w}{du^{n-1}} = g(u, w, \ldots, \frac{d^{n-2}w}{du^{n-2}}),$$

obteniéndose luego u de $t - t_0 = \int_{u_0}^{u} \frac{du}{w(u, c_1, \ldots, c_{n-1})}$.

Ejemplo II.3.5: Consideremos la ecuación que describe el movimiento en una dimensión de una masa m bajo la acción de una fuerza $f(x)$,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f(x). \tag{II.3.27}$$

Si $p = m\frac{dx}{dt} \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{p}{m}\frac{dp}{dx}$ y la ecuación resulta equivalente a la ecuación de primer orden

$$\frac{p}{m}\frac{dp}{dx} = f(x)\,.$$

Por lo tanto, $\frac{p}{m}dp = f(x)dx$ y entonces,

$$\frac{p^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m} = \int_{x_0}^{x} f(x')dx' = V(x_0) - V(x),$$

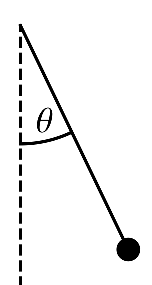
donde $V(x) = -\int f(x)dx$ es el potencial. Esta ecuación no es otra cosa que la conservación de la energía mecánica,

$$\frac{p^2}{2m} + V(x) = E,$$

de donde $p(x) = \sqrt{2m[E - V(x)]}$. De $m\frac{dx}{dt} = p(x)$ obtenemos $dt = m\frac{dx}{p(x)}$ y, finalmente,

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{E - V(x')}}. \tag{II.3.28}$$

Ejemplo II.3.6: Péndulo simple.



En este caso $V(x) = mgl(1 - \cos\theta)$, con $x = l\theta$. Reemplazando en (II.3.27) se obtiene

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{l}\sin\theta\,,$$

que es una ecuación no lineal de segundo orden. La solución exacta de esta ecuación está dada, en forma implícita, por

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos\theta' - \cos\theta_m}}, \tag{II.3.29}$$

donde hemos escrito $E = mgl[1 - \cos(\theta_m)]$, con $\theta \leq \theta_m$. Podemos, de esta forma, obtener tanto el período exacto $T(\theta_m) = 4t(\theta_m)$ como también la función $t(\theta)$, aun para grandes amplitudes θ_m, en términos de funciones elípticas. Por ejemplo, el período exacto es

$$T(\theta_m) = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_m}} = T_0 \frac{4}{\sqrt{2}\pi} \frac{K[\frac{1}{2}\theta_m, \text{sen}^{-2}(\frac{1}{2}\theta_m)]}{\sqrt{1 - \cos\theta_m}}\,, \tag{II.3.30}$$

donde K denota la integral elíptica de primera especie.

Para pequeños ángulos, podemos aproximar $\cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$, y se obtiene de (II.3.29) el resultado conocido $t = \sqrt{l/g}\arcsin(\theta/\theta_m)$, es decir,

$$\theta(t) = \theta_m \sin(\sqrt{g/l}\,t)\,, \tag{II.3.31}$$

que representa un movimiento armónico simple, con período

$$T = T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}\,,$$

independiente de la amplitud θ_m. Este resultado corresponde a la *aproximación lineal* $\sin\theta \approx \theta$ en (II.3.32), que conduce a la ecuación lineal de segundo orden

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{g}{l}\theta\,, \tag{II.3.32}$$

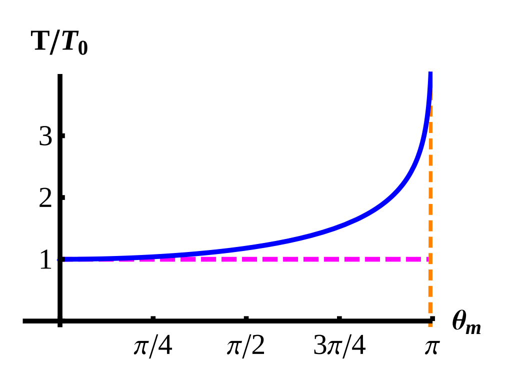


Figura 10: Gráfico del período exacto del péndulo, ecuación (II.3.30), en función de la amplitud θ_m. Aquí $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ es el período obtenido en la aproximación lineal (II.3.32), independiente de θ_m (línea horizontal). El período exacto tiende a infinito para $\theta \to \pi$.

cuya solución general exacta puede obtenerse fácilmente con los métodos que daremos en las próximas secciones. La solución que satisface $\theta(0) = 0$ y $\dot{\theta}(0) = \frac{2\pi\theta_m}{T_0}$ es, precisamente, (II.3.31).

En el orden siguiente, el período comienza a depender de la amplitud. A partir de (II.3.29) o (II.3.30) se obtiene

$$T = T_0[1 + \theta_m^2/16 + O(\theta_m^4)]\,. \qquad \text{(II.3.33)}$$

Como se aprecia en la Fig. 10, la aproximación lineal es muy satisfactoria para $\theta_m < \pi/4$. No obstante, para valores de θ_m cercanos a π, la discrepancia se torna significativa, ya que el período exacto tiende a infinito para $\theta_m \to \pi$. Notemos finalmente que la ecuación (II.3.29) es también válida para $E > 2mgl$ (que corresponde a $\cos(\theta_m) < -1$, o sea, $\theta_m = \pi + i\alpha$).

II.4. Sistemas de ecuaciones lineales de primer orden

Un caso particularmente importante de sistema de primer orden es aquél en que $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u})$ es una función lineal de $\boldsymbol{u}$. Como vimos en la sección anterior, aun si $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{u})$ es no lineal en $\boldsymbol{u}$, la aproximación lineal resulta de suma utilidad para estudiar en forma analítica el comportamiento de la solución en torno a un punto de equilibrio $\boldsymbol{u}_0$.

Definición II.4.1 *Un sistema de ecuaciones ordinarias de primer orden del tipo (*II.*3.20) se llama lineal, si puede escribirse en la forma*

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = A(t)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(t)\,, \qquad \text{(II.4.1)}$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & ... & A_{1n}(t) \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ . & ... & . \\ A_{n1}(t) & ... & A_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{II.4.2}$$

se denomina matriz del sistema.

Supondremos, además, que la condición inicial está dada por $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0$.
Más explícitamente, se tiene

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(t)u_j(t) + f_i(t) \qquad i = 1, ..., n\,, \tag{II.4.3}$$

con dados valores de $u_i(t_0)$ para $i = 1, ..., n$.

II.4.1. Resolución del caso homogéneo. Matriz fundamental

Estudiaremos, primero, el sistema homogéneo,

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = A(t)\boldsymbol{u}, \tag{II.4.4}$$

o sea, $L[\boldsymbol{u}] = 0$, con $L = \frac{d}{dt} - A(t)$. Probaremos un importante teorema:

Teorema II.4.2 *Las soluciones del sistema lineal homogéneo (*II*.4.4) forman un espacio vectorial de dimensión n (propiedad de superposición).*

Es inmediato verificar que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ es solución. En esas condiciones, que las soluciones formen un espacio vectorial (o lineal) significa que, si $\boldsymbol{u}_1(t)$ y $\boldsymbol{u}_2(t)$ son soluciones, la combinación lineal

$$\boldsymbol{u}(t) = c_1\boldsymbol{u}_1(t) + c_2\boldsymbol{u}_2(t) \tag{II.4.5}$$

es también solución $\forall$ c_1, c_2 (constantes). Que el espacio sea de dimensión n significa que existen exactamente n soluciones $\boldsymbol{u}_1(t)$, $\boldsymbol{u}_2(t)$, ..., $\boldsymbol{u}_n(t)$ linealmente independientes $\forall$ $t \in I_0$, tales que cualquier solución $\boldsymbol{u}(t)$ puede escribirse como combinación lineal de las mismas:

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j\boldsymbol{u}_j(t) \tag{II.4.6}$$

donde los coeficientes c_j son constantes.

Demostración: *Dado que el operador L en (*II*.4.4) es lineal, la combinación (*II*.4.5) será, obviamente, solución de (*II*.4.4) si $\boldsymbol{u}_1(t)$ y $\boldsymbol{u}_2(t)$ son soluciones.*

Mostraremos ahora que existen n y sólo n soluciones $\boldsymbol{u}_j(t)$ linealmente independientes. Dado que $\boldsymbol{u}$ posee n componentes, podemos encontrar n vectores linealmente independientes $\boldsymbol{u}_j^0$. Por ejemplo,

$$\boldsymbol{u}_1^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{u}_2^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \boldsymbol{u}_n^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{II.4.7}$$

Para $j = 1, \dots, n$, sea

$$\boldsymbol{u}_j(t) = \begin{pmatrix} u_{1j}(t) \\ u_{2j}(t) \\ \dots \\ u_{nj}(t) \end{pmatrix}$$

la solución del sistema (II.4.4) con la condición inicial $\boldsymbol{u}_j(t_0) = \boldsymbol{u}_j^0$. Por el teorema de existencia, tal solución existe y es única para $|t - t_0| \leq r$ (o sea, $t \in I_0$).

Consideremos ahora una solución arbitraria $\boldsymbol{u}(t)$ con la condición inicial $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0$. Para $t = t_0$, como los vectores $\boldsymbol{u}_j(t_0) = \boldsymbol{u}_j^0$ forman una base, podemos escribir

$$\boldsymbol{u}(t_0) = \sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{u}_j(t_0). \tag{II.4.8}$$

Debido a la linealidad del espacio, $\sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{u}_j(t)$ satisface la ecuación diferencial y la condición inicial. Pero, como la solución para una determinada condición inicial es única, debe cumplirse

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{u}_j(t) \tag{II.4.9}$$

$\forall\, t \in I_0$, ya que el segundo miembro de (II.4.9) es también solución de (II.4.4) y cumple la condición inicial. Esto muestra que la dimensión del espacio no es mayor que n.

Falta mostrar que las n soluciones $\boldsymbol{u}_j(t)$ permanecen linealmente independientes $\forall\, t \in I_0$. Si, por ejemplo, para $t = t_1 \in I_0$, las soluciones fuesen linealmente dependientes, entonces existiría una solución del tipo (II.4.9), con $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ no todos nulos, que sería nula para $t = t_1$:

$$\boldsymbol{u}(t_1) = \sum_{j=1}^{n} c_j \boldsymbol{u}_j(t_1) = \mathbf{0}\,.$$

Pero, como también existe la solución trivial $\boldsymbol{u}(t) = \mathbf{0}\ \forall\, t \in I_0$, por unicidad la solución anterior debe coincidir con la solución trivial $\forall\, t \in I_0$ y por lo tanto, $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$, en contradicción con lo supuesto. Las soluciones permanecen, pues, linealmente independientes.

□

Podemos formalizar algo más los resultados anteriores. Una matriz de soluciones linealmente independientes

$$U(t)=\begin{pmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) & \dots & u_{1n}(t)\\ u_{21}(t) & u_{22}(t) & \dots & u_{2n}(t)\\ & & \dots & \\ u_{n1}(t) & u_{n2}(t) & \dots & u_{nn}(t)\end{pmatrix}\,, \tag{II.4.10}$$

donde la columna j-ésima contiene las componentes de la solución $\boldsymbol{u}_j(t)$, se denomina *matriz fundamental* del sistema. Como $d\boldsymbol{u}_j/dt = A(t)\boldsymbol{u}_j(t)$, con $\boldsymbol{u}_j(0) = \boldsymbol{u}_j^0$, la matriz $U(t)$ satisface la ecuación

$$\frac{dU}{dt} = A(t)U(t), \quad \text{con} \quad U(t_0) = U_0\,, \tag{II.4.11}$$

donde U_0 es la matriz que contiene las n condiciones iniciales linealmente independientes $\boldsymbol{u}_j^0$ ($U_0 = I$ (matriz identidad) en el caso (II.4.7)). Recordando que n vectores son linealmente independientes si y sólo si el determinante de sus componentes es no nulo, tenemos $\mathrm{Det}[U(t_0)] \neq 0$, y por el teorema anterior, $\mathrm{Det}[U(t)] \neq 0\ \forall\ t \in I_0$.

La solución general de (II.4.4) puede expresarse como

$$\boldsymbol{u}(t) = U(t)\boldsymbol{c}, \tag{II.4.12}$$

donde $\boldsymbol{c}$ es un vector constante, lo cual es otra forma de escribir (II.4.9). La solución particular para la condición inicial $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0$ se obtiene para $\boldsymbol{c} = U^{-1}(t_0)\boldsymbol{u}_0$:

$$\boldsymbol{u}(t) = U(t)U^{-1}(t_0)\boldsymbol{u}_0 \equiv K(t,t_0)\boldsymbol{u}_0\,,$$

ya que satisface $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0$. Aquí hemos definido $K(t,t_0)$, que es la llamada matriz fundamental del sistema y permite resolver el problema homogéneo para condiciones iniciales arbitrarias. Obsérvese que $K(t,t_0)$ satisface la ecuación homogénea y, para $t = t_0$, se reduce a la matriz identidad. Para las condiciones iniciales (II.4.7), $U(t_0) = I$ y $\boldsymbol{u}(t) = U(t)\boldsymbol{u}_0$ (En este caso, $K(t,t_0) = U(t)$).

Utilizando el método de Picard, podemos expresar, en general, $U(t)$ para $t \in I_0$ como

$$U(t) = [I + \int_{t_0}^{t} A(t')dt' + \int_{t_0}^{t} A(t')dt' \int_{t_0}^{t'} A(t'')dt'' + \dots]U_0\,. \tag{II.4.13}$$

II.4.2. Evolución del determinante

Podemos calcular explícitamente $\mathrm{Det}[U(t)]$ y verificar que $\mathrm{Det}[U(t)] \neq 0$ si $\mathrm{Det}[U(t_0)] \neq 0$. Para ello, notemos primero que si t es un parámetro cualquiera de U, tenemos

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Det}[U] = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{dU_{ij}}{dt}\tilde{U}_{ji} = \mathrm{Tr}\left[\frac{dU}{dt}\tilde{U}\right]\,, \tag{II.4.14}$$

donde $\tilde{U}_{ji} = (-1)^{i+j}\mathrm{Det}[U^{(i,j)}]$ y $U^{(i,j)}$ es la matriz con la fila i y columna j de U suprimidas, tal que

$$U\tilde{U} = \mathrm{Det}[U]\, I$$

y Tr es la traza. Por lo tanto, en el caso (II.4.4),

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Det}[U] = \mathrm{Tr}[A(t)U\tilde{U}] = \mathrm{Det}[U]\mathrm{Tr}[A(t)]\,,$$

lo que constituye una ecuación diferencial lineal ordinaria para $\mathrm{Det}[U(t)]$. Obtenemos, entonces,

$$\mathrm{Det}[U(t)] = \mathrm{Det}[U(t_0)]\, e^{\int_{t_0}^{t}\mathrm{Tr}[A(t')]dt'},$$

con $\mathrm{Det}[U(t_0)] = \mathrm{Det}[U_0] \neq 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Det}[U(t)] \neq 0\ \forall\, t \in I_0$, de modo que las soluciones permanecen *linealmente independientes*, como habíamos demostrado.

II.4.3. Resolución del caso no homogéneo. Matriz de Green

Volvamos ahora al sistema lineal original (II.4.1). Si $U(t)$ es la matriz fundamental del sistema homogéneo (II.4.4), podemos plantear una solución particular del tipo

$$\boldsymbol{u}(t) = U(t)\boldsymbol{c}(t)\,.$$

Dado que $dU/dt = A(t)U$, tenemos:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \frac{dU}{dt}\boldsymbol{c} + U\frac{d\boldsymbol{c}}{dt} = A(t)U\boldsymbol{c} + U\frac{d\boldsymbol{c}}{dt} = A(t)\boldsymbol{u} + U\frac{d\boldsymbol{c}}{dt}\,.$$

Por lo tanto,

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - A(t)\boldsymbol{u} = U(t)\frac{d\boldsymbol{c}}{dt} = \boldsymbol{f}(t)\,,$$

de donde resulta $d\boldsymbol{c}/dt = U^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)$ y, por lo tanto,

$$\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{c}_0 + \int U^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)dt$$

La solución general es, entonces, de la forma

$$\boldsymbol{u}(t) = U(t)\boldsymbol{c}_0 + U(t)\int U^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)dt \qquad \text{(II.4.15)}$$

y la solución particular para $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0$ es

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(t) &= U(t)U^{-1}(t_0)\boldsymbol{u}_0 + U(t)\int_{t_0}^{t} U^{-1}(t')\boldsymbol{f}(t')dt' \\ &= K(t,t_0)\boldsymbol{u}_0 + \int_{t_0}^{t} K(t,t')\boldsymbol{f}(t')dt'\,, \qquad \text{(II.4.16)}\end{aligned}$$

con

$$K(t,t') = U(t)U^{-1}(t')\,. \tag{II.4.17}$$

Notemos que $K(t,t')$ satisface

$$\frac{dK(t,t')}{dt} = A(t)K(t,t'), \quad \text{con} \quad K(t',t') = I\,. \tag{II.4.18}$$

Observemos que el primer término de (II.4.16) es la solución del sistema homogéneo que satisface la condición inicial. El segundo, que se anula para $t = t_0$, es una solución particular del sistema inhomogéneo, construida en base a n soluciones particulares del sistema homogéneo (las soluciones fundamentales). La ecuación (II.4.16) generaliza y es completamente análoga a la ecuación (II.2.42) de II.2.4, válida para el caso de una ecuación, en cuyo caso $U(t) = u_h(t)$ es una matriz de 1×1 (con $u_h(t)$ una solución no nula de la ecuación homogénea) y $K(t,t') = u_h(t)/u_h(t')$.

Notemos también que, si $\boldsymbol{u}_1(t)$ y $\boldsymbol{u}_2(t)$ son soluciones particulares para $\boldsymbol{f}_1(t)$ y $\boldsymbol{f}_2(t)$, $\boldsymbol{u}(t) = c_1\boldsymbol{u}_1(t) + c_2\boldsymbol{u}_2(t)$ es una solución particular para $\boldsymbol{f}(t) = c_1\boldsymbol{f}_1(t) + c_2\boldsymbol{f}_2(t)$ (extensión de la propiedad de superposición). Esto puede verse de (II.4.16) o también, directamente, de (II.4.1) por la linealidad de L. Podemos, por lo tanto, descomponer la "fuerza" en varios términos o componentes y luego sumar las soluciones para cada una de ellas. Asimismo, si $\boldsymbol{f}(t)$ se multiplica por un factor α, la solución particular se multiplica por el mismo factor. La solución particular responde, por lo tanto, en forma proporcional a $\boldsymbol{f}$.

Consideremos, en detalle, la solución para condición inicial nula:

$$\boldsymbol{u}(t) \;=\; \int_{t_0}^{t} K(t,t')\boldsymbol{f}(t')dt'\,. \tag{II.4.19}$$

Si, además, $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{0}\ \forall\, t < 0$ y el sistema está en equilibrio para $t < t_0$, con $u(t) = 0$ $\forall\, t < t_0$, puede escribirse

$$\boldsymbol{u}(t) \;=\; \int_{-\infty}^{t} K(t,t')\boldsymbol{f}(t')dt' \tag{II.4.20}$$

o, equivalentemente,

$$\boldsymbol{u}(t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')\boldsymbol{f}(t')dt'\,, \tag{II.4.21}$$

donde hemos definido

$$G(t,t') \equiv \begin{cases} 0 & t_0 \le t < t' \\ K(t,t') & t_0 \le t' < t \end{cases}\,. \tag{II.4.22}$$

La matriz G se llama matriz de Green del sistema de ecuaciones. Como se ve, permite establecer el efecto, en un dado valor de t, de una fuente que actúa en cualquier $t' < t$.

Dado que, para problemas de valores iniciales, la variable t es, en general, el tiempo, suele llamarse a $G(t,t')$ así definida la función de Green causal. Nótese que es discontinua en $t=t'$ ($\text{lím}_{t\to t'^+}=I$; $\text{lím}_{t\to t'^-}=0$).

Escribiendo explícitamente los elementos de matriz, se tiene

$$u_i(t) \;=\; \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} G_{ij}(t,t')f_j(t')dt'\,, \tag{II.4.23}$$

con

$$G_{ij}(t,t') = \begin{cases} 0 & 0\le t<t' \\ K_{ij}(t,t') = \sum_{k=1}^{n} U_{ik}(t)U^{-1}_{kj}(t') & 0\le t'<t \end{cases}\,. \tag{II.4.24}$$

II.4.4. Sistemas lineales con coeficientes constantes

Estudiaremos ahora el caso muy importante en el que la matriz A en (II.4.1) es *independiente* de t, es decir, $A_{ij}(t)=A_{ij}$, constante $\forall\ i,j$. El sistema de ecuaciones *homogéneo*

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=A\boldsymbol{u} \tag{II.4.25}$$

es, ahora, *invariante* frente a traslaciones "temporales" $t\to t+c$. Por lo tanto, podemos tomar, sin pérdida de generalidad, $t_0=0$, ya que si $\boldsymbol{u}(t)$ es la solución de (II.4.25) para $\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0 \Rightarrow \boldsymbol{u}(t-t_0)$ será la solución de (II.4.4) para $\boldsymbol{u}(t_0)=\boldsymbol{u}_0$. Los sistemas que no dependen explícitamente del tiempo se denominan **autónomos** y exhiben obviamente la propiedad anterior.

Antes de considerar la solución general, notemos que si planteamos una solución particular de (II.4.25) de la forma

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{v}e^{\lambda t}\,, \tag{II.4.26}$$

donde λ y $\boldsymbol{v}$ son *independienes de* t, con $\boldsymbol{v}$ un vector *no nulo*, reemplazando en (II.4.25) obtenemos la ecuación $\lambda\boldsymbol{v}e^{\lambda t}=A\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$, o sea que,

$$A\,\boldsymbol{v}=\lambda\,\boldsymbol{v}\,. \tag{II.4.27}$$

Esta es, precisamente, *la ecuación de autovalores* asociada a la matriz A (véase Apéndice A): λ debe ser autovalor de A, siendo determinado por la ecuación

$$\text{Det}\,[A-\lambda I]=0\,,$$

y $\boldsymbol{v}$ debe ser un autovector asociado, es decir, un vector que satisface

$$(A-\lambda I)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}\,,\quad \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}\,.$$

Análogamente, si λ es autovalor y $\boldsymbol{v}$ un autovector asociado, (II.4.26) será solución de (II.4.25). En otras palabras, tenemos el *Teorema: $\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ será solución no nula de (II.4.25) si y sólo si λ es autovalor de A y $\boldsymbol{v}$ un autovector asociado.*

Si la matriz A es *diagonalizable* (ver Apéndice A), existen n autovectores linealmente independientes $\boldsymbol{v}_k$ asociados a autovalores λ_k, no necesariamente distintos. Obtenemos así n *soluciones linealmente independientes* de (II.4.25),

$$\boldsymbol{u}_k(t) = \boldsymbol{v}_k e^{\lambda_k t}, \quad k = 1, \ldots, n\,, \tag{II.4.28}$$

que permiten construir una matriz fundamental de la forma

$$U(t) = \left(\; \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \ldots, \boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n t} \;\right)\,. \tag{II.4.29}$$

La solución general del sistema es entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(t) &= U(t)\boldsymbol{c} \\ &= c_1 \boldsymbol{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n \boldsymbol{v}_n e^{\lambda_n t}\,. \end{aligned} \tag{II.4.30}$$

Nótese que λ_k puede ser real o complejo, aun si la matriz A es real. Si es real, los autovalores complejos aparecerán en pares conjugados, con autovectores también conjugados:

$$A\boldsymbol{v}_k = \lambda_k \boldsymbol{v}_k \;\Rightarrow\; A\bar{\boldsymbol{v}}_k = \bar{\lambda}_k \bar{\boldsymbol{v}}_k\,,$$

donde $\lambda_k = \lambda_k^r + i\lambda_k^i$, $\bar{\lambda}_k = \lambda_k^r - i\lambda_k^i$. En este caso, tanto la parte real como la parte imaginaria de $\boldsymbol{v}_k e^{\lambda_k t}$ serán soluciones reales (y linealmente independientes si $\lambda_k^i \neq 0$) del sistema. Cada par de autovalores complejos conjugados origina pues el par de soluciones reales linealmente independientes

$$\boldsymbol{u}_k^r(t) = \mathrm{Re}\,[\boldsymbol{v}_k e^{\lambda_k t}], \quad \boldsymbol{u}_k^i(r) = \mathrm{Im}\,[\boldsymbol{v}_k e^{\lambda_k t}]\,,$$

de elementos

$$\boldsymbol{u}_{jk}^r = |\boldsymbol{v}_{jk}| e^{\lambda_k^r t} \cos(\lambda_k^i\, t + \phi_{jk})\,, \quad \boldsymbol{u}_{jk}^i = |\boldsymbol{v}_{jk}| e^{\lambda_k^r t}\, \mathrm{sen}\,(\lambda_k^i\, t + \phi_{jk})\,,$$

donde hemos escrito $\boldsymbol{v}_{jk} = |\boldsymbol{v}_{jk}| e^{i\phi_{jk}}$. La parte imaginaria λ_k^i de λ_k representa obviamente una *frecuencia angular*.

Para tratar el caso general, en el que la matriz A no necesariamente es diagonalizable, volvemos al tratamiento general anterior.

II.4.5. Solución fundamental general en el caso constante

Si la matriz A es constante, la ecuación (II.4.13) conduce a

$$\begin{aligned} U(t) &= [I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \ldots]U_0 = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}\right] U_0 \\ &= \exp[At] U_0\,, \end{aligned} \tag{II.4.31}$$

donde hemos introducido la *exponencial* de una matriz,

$$\exp[A] \equiv \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(A)^m}{m!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \ldots \tag{II.4.32}$$

Esta serie converge $\forall$ matriz cuadrada A de $n \times n$ (si $|A_{ij}| \leq K \; \forall \, i, j \Rightarrow |(A^2)_{ij}| \leq nK^2$ y en general, $|(A^m)_{ij}| \leq (nK)^m/n$, por lo que $|[\exp(A)]_{ij}| \leq 1 + (e^{nK} - 1)/n$)). Podemos verificar que (II.4.31) es la solución de (II.4.11) $\forall t$. En efecto,

$$\frac{d}{dt} \exp[At] \;\; = \;\; \frac{d}{dt} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m t^m}{m!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A^m t^{m-1}}{(m-1)!} = A \exp[At] \, .$$

La solución general de la ecuación homogénea puede, pues, escribirse como

$$\boldsymbol{u}(t) = \exp[At]\boldsymbol{c} \tag{II.4.33}$$

y la solución particular para $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0$ es

$$\boldsymbol{u}(t) = \exp[A(t - t_0)]\boldsymbol{u}_0 \, .$$

La solución de la ecuación inhomogénea para $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{u}_0$ es entonces

$$\boldsymbol{u}(t) = \exp[A(t - t_0)]\boldsymbol{u}_0 + \int_{t_0}^{t} \exp[A(t - t')]\boldsymbol{f}(t')dt' \, , \tag{II.4.34}$$

que corresponde a $K(t, t') = \exp[A(t - t')]$ en (II.4.16).

Nota: Para matrices A y B generales,

$$\exp[A + B] \neq \exp[A] \exp[B] \neq \exp[B] \exp[A] \, .$$

La igualdad se cumple sólo si A ***conmuta*** con B, o sea, si $[A, B] \equiv AB - BA = 0$. Por ejemplo,

$$\exp[A] \exp[-A] = \exp[A - A] = \exp[0] = I \, .$$

Por lo tanto, la inversa de $\exp[A]$ es $\exp[-A]$. Además,

$$\exp[A(t - t')] = \exp[At - At'] = \exp[At] \exp[-At'] \, .$$

II.4.6. El caso diagonalizable

Veamos cómo evaluar $\exp[At]$. Si A es *diagonal*, es decir $A_{ij} = \lambda_i\delta_{ij} \Rightarrow (A^m)_{ij} = \lambda_i^m\delta_{ij}$ es también diagonal $\forall\ m$ y por lo tanto $\exp[At]$ es *diagonal*, con $(\exp[At])_{ij} = e^{\lambda_i}\delta_{ij}$. En tal caso, el sistema (II.4.4) es *desacoplado*, y las soluciones son, obviamente, $u_i(t) = u_i(0)e^{\lambda_i t}$, que pueden escribirse como $\boldsymbol{u}(t) = \exp[At]\boldsymbol{u}(0)$.

En general, si existe una matriz V de $n \times n$ no singular tal que

$$A = VDV^{-1}\,, \tag{II.4.35}$$

con D *diagonal*,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}\,,$$

se dice que la matriz A es *diagonalizable* (en el Apéndice A se resumen los conceptos fundamentales sobre *diagonalización* de matrices). En tal caso los elementos diagonales λ_i son necesariamente los *autovalores* de A y las columnas de V son los autovectores asociados:

$$V = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \end{pmatrix},\ \ \text{con}\ \ A\boldsymbol{v}_k = \lambda_k\boldsymbol{v}_k\,,\ \ k = 1, \dots, n\,,$$

tal que $AV = VD$.

Utilizando (II.4.35) tenemos $A^2 = (VA'V^{-1})^2 = VA'V^{-1}VA'V^{-1} = VA'^2V^{-1}$, y en general, $A^m = (VA'V^{-1})^m = VA'^mV^{-1}$, por lo que

$$\exp[At] = \exp[V(Dt)V^{-1}] = V\exp[Dt]V^{-1}\,, \tag{II.4.36}$$

con

$$\exp[Dt] = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

La evaluación de $\exp[At]$ es, entonces, inmediata. Se reobtiene así la solución general (II.4.30):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(t) &= \exp[At]\tilde{\boldsymbol{c}} = V\exp[Dt]\boldsymbol{c} \\ &= \sum_{k=1}^{n} c_k\boldsymbol{v}_k e^{\lambda_k t}\,, \end{aligned} \tag{II.4.37}$$

donde $\boldsymbol{c} = V^{-1}\tilde{\boldsymbol{c}} = (c_1, \dots, c_n)^t$ es un vector de constantes arbitrarias. La expresión solución (II.4.37) coincide con la solución previamente hallada (II.4.30).

Si $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{v}_k$ (autovector de A) $\Rightarrow c_j = \delta_{jk}$ y

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{v}_k e^{\lambda_k t}\,. \tag{II.4.38}$$

La solución $\boldsymbol{u}(t)$ permanece, en este caso, *proporcional* a $\boldsymbol{u}(0)$ y tiene una evolución de tipo exponencial (real o compleja).

La transformación (II.4.35) (denominada transformación de semejanza) corresponde a un *cambio de base*. Para una matriz V no singular arbitraria de $n \times n$, el vector

$$\tilde{\boldsymbol{u}} = V^{-1}\boldsymbol{u}\,, \tag{II.4.39}$$

de componentes $\tilde{u}_i = \sum_j V^{-1}_{ij} u_j$, satisface la ecuación

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{u}}}{dt} = A'\,\tilde{\boldsymbol{u}}, \quad A' = V^{-1}AV\,. \tag{II.4.40}$$

Si para una matriz A diagonalizable, elegimos V como la matriz de autovectores, A' es la matriz diagonal D de autovalores y el sistema (II.4.40) queda *desacoplado*:

$$\frac{d\tilde{u}_k}{dt} = \lambda_k \tilde{u}_k\,, \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Podemos, entonces, "desacoplar" el sistema original (II.4.4) mediante la transformación lineal (II.4.39). Las nuevas variables $\tilde{u}_k$ pueden interpretarse como las coordenadas de la solución en la base que diagonaliza la matriz A (base de autovectores), y son las "coordenadas normales" del sistema. La ecuación $\boldsymbol{u}(t) = V\tilde{\boldsymbol{u}}(t)$ conduce a (II.4.37).

Ejemplo II.4.1: Consideremos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{dx}{dt} & = & ax + by \\ \frac{dy}{dt} & = & ay + bx \end{array} \right. . \tag{II.4.41}$$

Podemos escribirlo en la forma

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = A\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

La ecuación característica es $\mathrm{Det}[A - \lambda I] = (a - \lambda)^2 - b^2 = 0$, y sus raíces son

$$\lambda_\pm = a \pm b\,.$$

Resolviendo la ecuación $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ obtenemos los autovectores $\boldsymbol{v}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, que son ortogonales, $\boldsymbol{v}_+^* \cdot \boldsymbol{v}_- = 0$, y están normalizados: $\boldsymbol{v}_+^* \cdot \boldsymbol{v}_+ = \boldsymbol{v}_-^* \cdot \boldsymbol{v}_- = 1$ (o sea, son ortonormales). La solución general de (II.4.41) es, según (II.4.37),

$$\boldsymbol{u}(t) = c_+\boldsymbol{v}_+e^{(a+b)t} + c_-\boldsymbol{v}_-e^{(a-b)t}\,,$$

es decir, definiendo $\alpha_\pm = c_\pm/\sqrt{2}$,

$$x(t) = \alpha_+e^{(a+b)t} - \alpha_-e^{(a-b)t}, \quad y(t) = \alpha_+e^{(a+b)t} + \alpha_-e^{(a-b)t}\,. \tag{II.4.42}$$

Para $|b| < |a|$, el acoplamiento b puede pensarse como una "perturbación" que produce un "desdoblamiento" del ritmo de crecimiento ($a > 0$) o decaimiento ($a < 0$) de x e y, originando dos componentes en la solución general para estas variables.

Podemos obtener las soluciones anteriores directamente planteando una solución del tipo $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}e^{\lambda t}$, lo que conduce a la ecuación de autovalores $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$.

Escribiendo $A = VA'V^{-1}$, con

$$A' = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}, \; V = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; V^{-1} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

obtenemos, también,

$$\exp[At] = V\exp[A't]V^{-1} = e^{at}\begin{pmatrix} \cosh(bt) & \sinh(bt) \\ \sinh(bt) & \cosh(bt) \end{pmatrix}.$$

Las columnas de esta matriz son las soluciones $\boldsymbol{u}_1(t)$, $\boldsymbol{u}_2(t)$, que satisfacen $\boldsymbol{u}_1(0) = \binom{1}{0}$, $\boldsymbol{u}_2(0) = \binom{0}{1}$, y corresponden a $\alpha_+ = -\alpha_- = 1/2$ y $\alpha_+ = \alpha_- = 1/2$ en (II.4.42). Si $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, la solución es $x_0\boldsymbol{u}_1(t)$, o sea,

$$x(t) = x_0 e^{at}\cosh(bt), \quad y(t) = x_0 e^{at}\sinh(bt)\,. \tag{II.4.43}$$

Debido al acoplamiento b, $y(t)$ adquiere un valor no nulo al aumentar t.

Las soluciones (II.4.42) pueden interpretarse mejor en términos de las nuevas variables

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = V^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix},$$

que satisfacen las ecuaciones *desacopladas*

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = (a+b)\tilde{x} \quad \frac{d\tilde{y}}{dt} = (a-b)\tilde{y}\,. \tag{II.4.44}$$

Las soluciones de (II.4.44) son, obviamente,

$$\tilde{x}(t) = c_+ e^{(a+b)t}, \quad \tilde{y}(t) = c_- e^{(a-b)t}\,. \tag{II.4.45}$$

Como $\binom{x}{y} = (\tilde{x} \mp \tilde{y})/\sqrt{2}$, las soluciones (II.4.42) se obtienen inmediatamente de (II.4.45). Las constantes $c_\pm$ no son otra cosa que los valores iniciales $\tilde{x}(0)$, $\tilde{y}(0)$.

Las fórmulas anteriores permanecen válidas para matrices A complejas. Por ej., la ecuación de Schrödinger para un sistema de dos niveles degenerados de energía ε con "acoplamiento" α es

$$i\hbar\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = H\boldsymbol{u}\,, \quad H = \begin{pmatrix} \varepsilon & \alpha \\ \alpha & \varepsilon \end{pmatrix},$$

donde H es la matriz que representa al Hamiltoniano y $\boldsymbol{u}(t)$ la función de onda. Corresponde a $a = -i\varepsilon/\hbar$, $b = -i\alpha/\hbar$ en (II.4.41). La ecuación (II.4.43) conduce a

$$|x(t)|^2 = |x_0|^2\cos^2(\alpha t/\hbar), \quad |y(t)|^2 = |x_0|^2\sin^2(\alpha t/\hbar)\,.$$

Debido a la interacción, el sistema oscila entre los dos niveles con frecuencia $f = \frac{\alpha}{2\pi\hbar}$.

Problema sugerido II.4.1:

i) Determinar el movimiento de una partícula no relativista de carga q bajo la acción de la fuerza de Lorentz. Sugerencia: Resolver el sistema lineal de primer orden $md\boldsymbol{v}/dt = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, y mostrar que las trayectorias son espirales.

ii) Suponer que se añade ahora un campo eléctrico constante en la dirección: a) del campo magnético y b) perpendicular al campo magnético. Resolver el sistema y describir el movimiento resultante en cada caso.

Problema guiado II.4.2: Trayectorias en el plano de fase

Consideremos el sistema lineal homogéneo de primer orden,

$$\left\{ \begin{array}{l} dx/dt = ax + by \\ dy/dt = cx + dy \end{array} \right. \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}\,. \tag{II.4.46}$$

Las soluciones reales $x(t)$, $y(t)$ del sistema pueden visualizarse graficando las “trayectorias” $(x(t), y(t))$ en el plano x, y, denominado normalmente plano (o espacio) de fase.
a) Mostrar que las trayectorias no pueden cruzarse para tiempos t finitos.
b) Probar que la ecuación diferencial que define las trayectorias es $\frac{dy}{dx} = \frac{cx+dy}{ax+by}$.
c) Mostrar que si $\binom{x(0)}{y(0)}$ coincide con un autovector de la matriz asociado a un autovalor real $\lambda \neq 0$, la trayectoria es recta. Indicar en qué casos se alejará y cuándo se acercará al origen al aumentar t. d) Considere ahora $a = d = \alpha$, $b = c = \beta$. Grafique e interprete las trayectorias para: i) $\alpha = 1$, $\beta = 1/2$, ii) $\alpha = -1$, $\beta = 1/2$, iii) $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Identifique los casos en que el origen $(x, y) = (0, 0)$ es un punto de equilibrio estable y aquellos en que es inestable.
e) Considere ahora $a = d = \alpha$, $c = -b = \omega$, caso en el que los autovalores de la matriz son complejos. Grafique e interprete las trayectorias para:
i) $\alpha = -1, \omega = 1$, ii) $\alpha = 1, \omega = 1$, iii) $\alpha = 0, \omega = 1$. Muestre que en este último caso las trayectorias son círculos centrados en el origen.

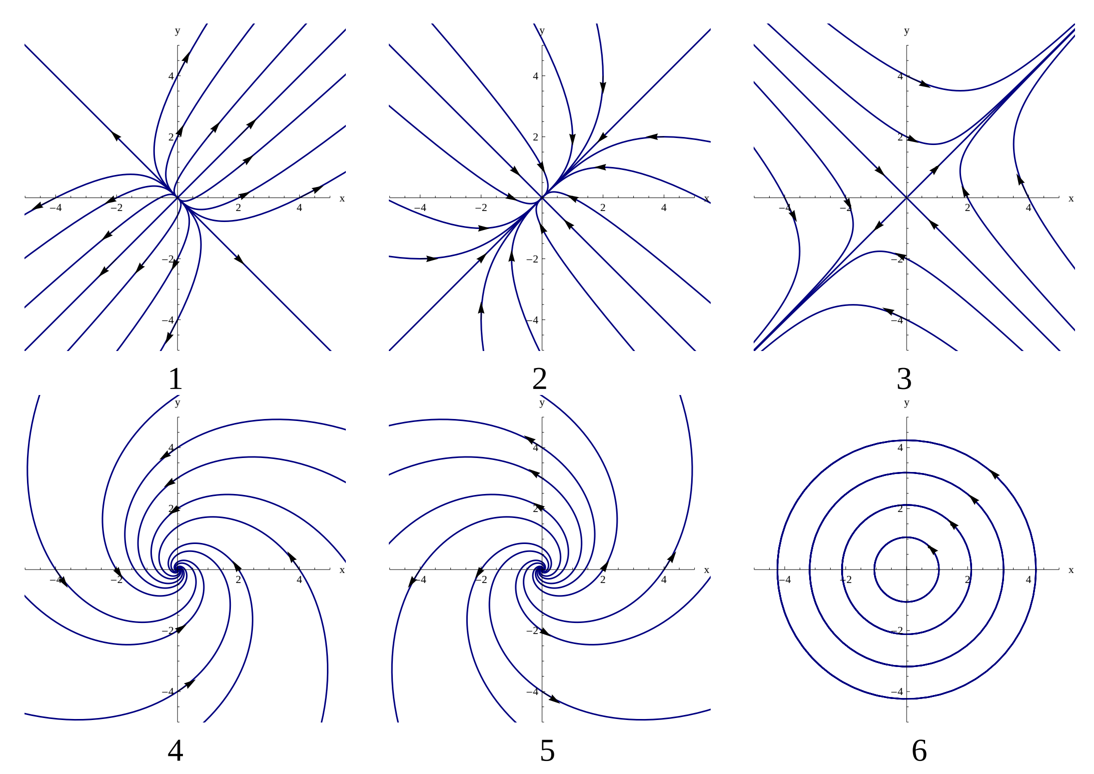


Figura 11: Gráficos de las soluciones del sistema (II.4.46) para $a = d$, $|\alpha| = |\beta|$. Las flechas indican el sentido del movimiento. Los gráficos corresponden a: 1) Ambos autovalores reales y positivos, 2) Ambos reales y negativos, 3) Uno positivo y uno negativo, 4) Complejos con parte real negativa, 5) Complejos con parte real positiva, 6) Imaginarios.

II.4.7. Evaluación de $\exp[At]$ en el caso no diagonalizable

Una matriz cuadrada arbitraria puede siempre descomponerse en la forma $A = VA'V^{-1}$, con

$$A' = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & D_m \end{pmatrix},$$

donde D_k son bloques de $n_k \times n_k$ de la forma

$$\begin{aligned} D_k &= \begin{pmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots \\ & & \dots & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix} \\ &= \lambda_k I_k + J_k, \quad J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ & & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con λ_k autovalor de A ($\text{Det}[A-\lambda_k I]=0$) e I_k la identidad de $n_k\times n_k$ ($\sum_{k=1}^m n_k = n$). Esta forma se denomina *descomposición de Jordan* (o forma canónica de Jordan), y el caso diagonalizable corresponde a $n_k = 1\ \forall k$. En este último caso, la multiplicidad algebraica $m_a(\lambda)$ de cada autovalor λ (multiplicidad como raíz del polinomio característico) coincide con la multiplicidad geométrica $m_g(\lambda)$ (dimensión del espacio propio asociado, es decir, número de autovectores linealmente independientes asociados a λ): $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$. En cambio, en el caso no diagonalizable, $m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$.

Como $AV = VA'$, las columnas $\boldsymbol{v}_i^k$ de V correspondientes al bloque k quedan determinadas, si $n_k \geq 2$, por

$$A\boldsymbol{v}_1^k = \lambda_k \boldsymbol{v}_1^k\,,\quad A\boldsymbol{v}_i^k = \lambda_k \boldsymbol{v}_i^k + \boldsymbol{v}_{i-1}^k,\ i = 2.\ldots,n_k\,. \qquad \text{(II.4.47)}$$

La base de Jordan del bloque k puede, pues, obtenerse comenzando con un vector “semilla” $\boldsymbol{v}_{n_k}^k$ no nulo que satisface

$$(A-\lambda I)^{n_k}\boldsymbol{v}_{n_k}^k = \boldsymbol{0},\quad (A-\lambda I)^{n_k-1}\boldsymbol{v}_{n_k}^k \neq \boldsymbol{0},$$

obteniéndose luego los vectores $\boldsymbol{v}_i^k$ como

$$\boldsymbol{v}_i^k = (A-\lambda I)^{n_k-i}\boldsymbol{v}_{n_k}^k\,,\quad i = 1,\ldots,n_k-1\,,$$

con $\boldsymbol{v}_1^k$ autovector de A asociado a λ. Cada bloque contiene, pues, un solo autovector.

La descomposición de Jordan permite evaluar $\exp[At]$ fácilmente. La matriz J_k es *nilpotente*: $J_k^{n_k} = 0$. Por lo tanto, como $[I_k, J_k] = 0$,

$$\begin{aligned}\exp[D_k t] &= \exp[\lambda_k I_k t]\exp[J_k t]\\ &= e^{\lambda_k t}[I_k + J_k t + \ldots + \frac{(J_k t)^{n_k-1}}{(n_k-1)!}]\\ &= e^{\lambda_k t}\begin{pmatrix} 1 & t & \ldots & t^{n_k-1}/(n_k-1)!\\ 0 & 1 & \ldots & t^{n_k-2}/(n_k-2)!\\ \ldots & & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & t\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{pmatrix}.\end{aligned} \qquad \text{(II.4.48)}$$

Se obtiene, entonces,

$$\exp[At] = V\begin{pmatrix} e^{D_1 t} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & e^{D_2 t} & \ldots & 0\\ & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & e^{D_m t}\end{pmatrix}V^{-1}\,.$$

La solución general (II.4.33) es, por lo tanto, de la forma

$$\boldsymbol{u}(t) \;=\; V\exp[A't]\boldsymbol{c} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{n_k} c_i^k \boldsymbol{v}_i^k(t)\,,$$

con $\boldsymbol{c} = V^{-1}\tilde{\boldsymbol{c}}$ y $\boldsymbol{v}_i^k$ las soluciones particulares

$$\boldsymbol{v}_1^k(t) = e^{\lambda_k t}\boldsymbol{v}_1^k, \quad \boldsymbol{v}_2^k(t) = e^{\lambda_k t}(\boldsymbol{v}_2^k + t\boldsymbol{v}_1^k)\,, \quad \boldsymbol{v}_3^k(t) = e^{\lambda_k t}(\boldsymbol{v}_3^k + t\boldsymbol{v}_2^k + \frac{t^2}{2!}\boldsymbol{v}_1^k)\,, \ldots$$

es decir,

$$\boldsymbol{v}_i^k(t) \;=\; e^{\lambda_k t}\sum_{j=1}^{i}\boldsymbol{v}_j^k\frac{t^{i-j}}{(i-j)!}\,, \quad i = 1, \ldots, n_k\,. \tag{II.4.49}$$

Cada bloque genera así n_k soluciones linealmente independientes $\{\boldsymbol{v}_1^k(t), \ldots, \boldsymbol{v}_{n_k}^k(t)\}$, y el número total de soluciones linealmente independientes generadas por un autovalor λ coincide siempre con su multiplicidad algebraica $m_a(\lambda)$.

La solución (II.4.49) es una suma de exponenciales $e^{\lambda_k t}$ multiplicadas por potencias de t menores que n_k. Esta solución puede interpretarse en términos del vector $\tilde{\boldsymbol{u}} = V^{-1}\boldsymbol{u}$, que satisface la ecuación $d\tilde{\boldsymbol{u}}/dt = A'\tilde{\boldsymbol{u}}$, o sea,

$$\frac{d\tilde{u}_i^k}{dt} = \lambda_k\tilde{u}_i^k + \tilde{u}_{i+1}^k, \; i = 1, \ldots, n_k - 1, \quad \frac{d\tilde{u}_{n_k}^k}{dt} = \lambda_k\tilde{u}_{n_k}^k\,, \tag{II.4.50}$$

para el bloque k. Las soluciones de este sistema son precisamente las columnas de la matriz (II.4.48). No es posible ahora desacoplar completamente el sistema. La forma (II.4.50) es la representación "mínimamente acoplada" del mismo.

Observemos que, si se desea resolver el caso no diagonalizable en forma directa, ante la presencia de un autovalor λ con $m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$, se debe proponer, además de la solución exponencial $\boldsymbol{v}e^{\lambda t}$, una segunda solución de la forma

$$\boldsymbol{u}(t) = e^{\lambda t}(\boldsymbol{w} + t\boldsymbol{v})\,.$$

Al reemplazarla en el sistema $d\boldsymbol{u}/dt = A\boldsymbol{u}$, se obtienen las ecuaciones

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}, \quad A\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}\,, \tag{II.4.51}$$

que implican que $\boldsymbol{v}$ debe ser autovector de A asociado a λ y $\boldsymbol{w}$ el segundo vector de la base de Jordan asociada al bloque generado por el autovector $\boldsymbol{v}$ (o sea, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v}_2$). Si aún no se obtienen $m_a(\lambda)$ soluciones linealmente independientes, se propone una nueva solución de la forma

$$\boldsymbol{u}(t) = e^{\lambda t}(\boldsymbol{v}_m + \boldsymbol{v}_{m-1}t + \ldots + \boldsymbol{v}_1\frac{t^{m-1}}{(m-1)!})\,, \tag{II.4.52}$$

con $m = 2$ que, al reemplazarla en el sistema, conduce a las ecuaciones de Jordan (II.4.47). De ser necesario, se sigue proponiendo soluciones de la forma (II.4.52) com $m = 3, 4,$ etc., hasta obtener $m_a(\lambda)$ soluciones linealmente independientes.

Finalmente notemos que, en un sistema de 2×2 no diagonalizable, $D = \lambda I_2 + J_2$, con λ el único autovalor de A, por lo que $A = V(\lambda I_2 + J_2)V^{-1} = \lambda I_2 + V J_2 V^{-1}$. Por lo tanto,

$$\exp[At] = e^{\lambda t} V(I_2 + J_2 t)V^{-1} = e^{\lambda t}[I_2 + t(A - \lambda I_2)]\,, \qquad \text{(II.4.53)}$$

lo que evita tener que hallar explícitamente la base de Jordan.

Ejemplo II.4.2:

$$\frac{dx}{dt} = ax + by, \quad \frac{dy}{dt} = ay\,. \qquad \text{(II.4.54)}$$

En este caso

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI_2 + bJ_2$$

y la ecuación característica $\mathrm{Det}[A - \lambda I_2] = (a - \lambda)^2 = 0$, posee una única raíz $\lambda = a$. Esta matriz no es diagonalizable. No obstante,

$$\exp[At] = \exp[aI_2 t]\exp[bJ_2 t] = \begin{pmatrix} e^{at} & be^{at}t \\ 0 & e^{at} \end{pmatrix}. \qquad \text{(II.4.55)}$$

La primera columna nos da la solución que satisface $\boldsymbol{u}_1(0) = \binom{1}{0}$ y la segunda $\boldsymbol{u}_2(0) = \binom{0}{1}$. La solución general puede entonces escribirse como

$$\boldsymbol{u}(t) \;=\; c_1 e^{at}\boldsymbol{v}_1 + c_2 e^{at}(\boldsymbol{v}_2 + t\boldsymbol{v}_1)\,, \qquad \text{(II.4.56)}$$

con $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ b^{-1} \end{pmatrix}$, que satisfacen $A\boldsymbol{v}_1 = \lambda\boldsymbol{v}_1$, $A\boldsymbol{v}_2 = \lambda\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1$. El sistema (II.4.54) puede también tratarse en forma elemental resolviendo primero la ecuación para y y luego la ecuación para x, considerando a by como término no homogéneo.

Nota. La matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ \varepsilon & a \end{smallmatrix}\right)$ es diagonalizable si $b\varepsilon \neq 0$, ya que en tal caso posee dos autovalores distintos: La ecuación $\mathrm{Det}[A - \lambda I] = (\lambda - a)^2 - b\varepsilon = 0$ conduce a $\lambda_\pm = a \pm \sqrt{b\varepsilon}$, con autovectores $\boldsymbol{v}_\pm = \binom{1}{\lambda_\pm/b}$, obteniéndose

$$\exp[At] = e^{at}\begin{pmatrix} \cosh(rt) & \frac{b}{r}\sinh(rt) \\ \frac{r}{b}\sinh(rt) & \cosh(rt) \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{b\varepsilon}\,.$$

Tomando el límite $r \to 0$ se obtiene la ecuación (II.4.55), ya que la solución para un t fijo arbitrario es una función continua de los parámetros que definen la matriz del sistema.

II.4.8. Exponencial en el caso A(t) variable

Ahora que sabemos exponenciar matrices, podemos volver al sistema de ecuaciones lineales general (II.4.4).

Si $[A(t), A(t')] = 0 \,\forall\, t, t' \in I_0$, obtenemos

$$U(t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} A(t')dt'\right] U_0\,. \qquad \text{(II.4.57)}$$

En efecto, en este caso no importa el orden temporal en los términos del desarrollo (II.4.13). Se obtiene

$$\int_{t_0}^{t} A(t')dt' \int_{t_0}^{t'} A(t'')dt'' = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} A(t')dt' \int_{t_0}^{t} A(t'')dt''\,,$$

ya que $A(t')A(t'') = A(t'')A(t')$. Análogamente,

$$\int_{t_0}^{t} A(t_1)dt_1 \int_{t_0}^{t_1} A(t_2)dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} A(t_n)dt_n = \frac{1}{n!}\int_{t_0}^{t} A(t_1)dt_1 \int_{t_0}^{t} A(t_2)dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t} A(t_n)dt_n$$

y, por lo tanto, el desarrollo (II.4.13) conduce a (II.4.57).

En el caso general, la ecuación (II.4.13) suele escribirse como

$$U(t) = \hat{T}\exp\left[\int_{t_0}^{t} A(t')dt'\right] U_0\,, \qquad \text{(II.4.58)}$$

donde $\hat{T}$ es el operador de "ordenamiento temporal": $\hat{T}[A(t)A(t')] \equiv \left\{\begin{smallmatrix} A(t)A(t') \text{ si } t>t' \\ A(t')A(t) \text{ si } t<t' \end{smallmatrix}\right.$, con una definición análoga para un producto de más de dos términos.

II.5. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

Como ya hemos visto, toda ecuación diferencial ordinaria de orden n, dadas condiciones iniciales sobre las primeras $n-1$ derivadas, puede reducirse a un sistema de n ecuaciones de primer orden con una cierta condición inicial. En particular, esto es cierto para las ecuaciones lineales. Consideremos, primero, la ecuación *homogénea* de orden n

$$\frac{d^n u}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1(t)\frac{du}{dt} + a_0(t)u = 0\;. \qquad \text{(II.5.1)}$$

con condiciones iniciales dadas sobre u, $\frac{du}{dt}, \ldots \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}$. Escribiendo

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u \\ \frac{du}{dt} \\ \ldots \\ \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} \end{pmatrix}\,,$$

la ecuación (II.5.1) es equivalente al sistema lineal de primer orden

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = A(t)\boldsymbol{u}\,, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ & \ldots & & \\ & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \ldots & -a_{n-1}(t), \end{pmatrix} \qquad \text{(II.5.2)}$$

con la condición inicial $\boldsymbol{u}(t_0)=\begin{pmatrix} u(t_0)\\ \frac{du}{dt}(t_0)\\ \ldots\\ \frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}(t_0)\end{pmatrix}$.

Si los coeficientes $a_i(t)$ son continuos en un intervalo I_0, los teoremas de existencia y superposición aseguran la existencia de n soluciones linealmente independientes $\boldsymbol{u}_i(t)$ para $t\in I_0$. Esto implica aquí la existencia de n *soluciones linealmente independientes*

$$u_1(t),\ldots,u_n(t)\,,$$

de (II.5.1), ya que las siguientes componentes de $\boldsymbol{u}_i(t)$ son las derivadas de la primera componente $u_i(t)$. En otras palabras, el conjunto de soluciones de (II.5.1) *es un espacio vectorial de dimensión* n, y la solución general de (II.5.1) es

$$u(t)=c_1u_1(t)+\ldots+c_nu_n(t) \tag{II.5.3}$$

Más aún, el determinante

$$W(u_1,\ldots,u_n) \;=\; \mathrm{Det}[U(t)]=\begin{vmatrix} u_1 & \ldots & u_n\\ \frac{du_1}{dt} & \ldots & \frac{du_n}{dt}\\ & \ldots & \\ \frac{d^{n-1}u_1}{dt^{n-1}} & \ldots & \frac{d^{n-1}u_n}{dt^{n-1}}\end{vmatrix}\,, \tag{II.5.4}$$

denominado usualmente *Wronskiano, es no nulo* $\forall t\in I_0$, lo que constituye una condición *más fuerte* que la independencia lineal de las funciones $u_i(t)$: Si n funciones $\{f_1(t),\ldots,f_n(t)\}$ son linealmente dependientes, entonces $W(f_1,\ldots,f_n)=0$. Pero si $\{f_1(t),\ldots,f_n(t)\}$ son linealmente independientes, $W(f_1,\ldots,f_n)$ puede ser también nulo: Si $f_1=t$, $f_2=t^2$, $W(f_1,f_2)=t^2$ se anula para $t=0$, a pesar de que son funciones linealmente independientes para $t\in\Re$. Más aún, las funciones $f_1(t)=\{^{t^2\;t\geq 0}_{0\;\;t<0}$, $f_2=\{^{0\;\;t\geq 0}_{t^2\;t<0}$ son también linealmente independientes si $t\in\Re$, pero $W(f_1,f_2)=0\;\forall t$. Estos pares de funciones no pueden, pues, ser las soluciones linealmente independientes de ninguna ecuación (II.5.1) de segundo orden con coeficientes $a(t)$ continuos para todo $t\in\Re$, ya que las soluciones $u_1(t)$, $u_2(t)$ deben cumplir además $W(u_1,u_2)\neq 0\;\forall\; t\in\Re$.

Una solución particular $u(t)$ de (II.5.1) queda entonces completamente determinada, para $t\in I_0$, por el valor inicial de $\boldsymbol{u}(t)$, es decir, por los valores iniciales de u y de sus primeras $n-1$ derivadas en un punto arbitrario $t_0\in I_0$:

$$u(t_0)=u_0\,,\;u'(t_0)=u_0^1\,,\;\ldots,\;u^{(n-1)}(t_0)=u_0^{n-1}\,. \tag{II.5.5}$$

Explícitamente, se verifica que el sistema lineal resultante para los coeficientes $c_1,\ldots,c_n$ en la solución general (II.5.3),

$$\begin{cases} c_1u_1(t_0)+\ldots+c_nu_n(t_0) &= u_0\\ c_1u_1'(t_0)+\ldots+c_nu_n'(t_0) &= u_0'\\ & \ddots\\ c_1u_1^{n-1}(t_0)+\ldots+c_nu_n^{n-1}(t_0) &= u_0^{n-1}\end{cases}$$

posee *solución única* $\forall\ \{u_0, u_0^1 \ldots, u_0^{n-1}\} \in \Re^n$ y $\forall\ t_0 \in I_0$, ya que el determinante de la matriz de coeficientes de este sistema es justamente el Wronskiano (II.5.4), que es no nulo $\forall\ t_0 \in I_0$.

Podemos observar, como anticipo, que este es un caso particular (unidimensional) del llamado problema de Cauchy, en que una solución particular de una ecuación lineal en derivadas parciales de orden n queda unívocamente determinada al dar el valor de la función y sus $n-1$ derivadas normales sobre una hipersuperficie de dimensión igual a la del espacio menos uno. En nuestro caso unidimensional, se trata de un punto, es decir, $t = t_0$.

II.5.1. Caso de coeficientes constantes

Consideremos ahora el caso importante en que $a_i(t) = a_i$, constante, para $i = 0, \ldots, n$–1:

$$\frac{d^n u}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{du}{dt}+a_0 u = 0\ . \qquad \text{(II.5.6)}$$

La matriz A es constante y, en virtud de lo hallado en II.4.4, las soluciones del problema homogéneo serán del tipo $u(t) = e^{\lambda t}$, o bien $e^{\lambda t}t^j$, con j entero. La ecuación característica para A es

$$\text{Det}[\lambda I - A]=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0\,, \qquad \text{(II.5.7)}$$

que puede obtenerse directamente planteando una solución puramente exponencial

$$u(t) = ce^{\lambda t}$$

en (II.5.6).

Si las raíces de (II.5.7) son todas distintas, un conjunto de soluciones linealmente independientes es

$$u_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \ldots, u_n(t) = e^{\lambda_n t}\,,$$

y la solución general es

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}\,.$$

Las constantes c_k pueden determinarse a partir de las n condiciones iniciales (II.5.5).

En el caso general, podemos escribir (II.5.7) en la forma

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\ldots(\lambda-\lambda_m)^{n_m} = 0\,,$$

donde n_k es la multiplicidad de la raíz λ_k ($\sum_{k=1}^m n_k = n$). Por lo tanto, (II.5.1) puede escribirse como

$$[(\frac{d}{dt}-\lambda_1)^{n_1}(\frac{d}{dt}-\lambda_2)^{n_2}\ldots(\frac{d}{dt}-\lambda_m)^{n_m}]u = 0\,, \qquad \text{(II.5.8)}$$

donde $(\frac{d}{dt})^j = \frac{d^j}{dt^j}$. Dado que $(\frac{d}{dt}-\lambda_k)e^{\lambda_k t} = 0 \ \Rightarrow\ (\frac{d}{dt}-\lambda_k)(e^{\lambda_k t}t^j) = je^{\lambda_k t}t^{j-1}$ y

$$(\frac{d}{dt}-\lambda_k)^{n_k}(e^{\lambda_k t}t^j) = 0, \quad j = 0, \ldots, n_k - 1\,.$$

Un conjunto de n soluciones linealmente independientes de (II.5.8) es, entonces, $\{e^{\lambda_k t}t^j,\ j = 0,\ldots,n_k-1,\ k=1,\ldots,m\}$, y la solución general es

$$u(t) = \sum_{k=1}^{m} e^{\lambda_k t}\sum_{j=0}^{n_k-1} c_{kj}t^j\,.$$

Las constantes c_{kj} pueden determinarse, nuevamente, a partir de las condiciones iniciales (II.5.5).

Observación: Si alguna raíz λ es compleja, o sea $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$, y si los coeficientes a_i son todos reales, $\bar{\lambda} = \lambda_r - i\lambda_i$ será también raíz, ya que las raíces complejas aparecerán en pares conjugados. Por lo tanto, si se desea tener una base de n soluciones reales, basta con tomar las partes real e imaginaria de $e^{\lambda t}$:

$$y_r(t) = \mathrm{Re}[e^{\lambda t}] = e^{\lambda_r t}\cos(\lambda_i t),\quad y_i(t) = \mathrm{Im}[e^{\lambda t}] = e^{\lambda_r t}\sin(\lambda_i t)\,,$$

ya que $y_r(t) = (e^{\lambda t} + e^{\bar{\lambda}t})/2$, $y_i(t) = (e^{\lambda t} - e^{\bar{\lambda}t})/(2i)$, son combinaciones lineales linealmente independientes de las soluciones $e^{\lambda t}$ y $e^{\bar{\lambda}t}$ si $\lambda_i \neq 0$. Esto está de acuerdo con las consideraciones generales para ecuaciones diferenciales lineales mencionadas en el primer capítulo.

Notemos, también, que las soluciones exponenciales asociadas con raíces complejas representan soluciones oscilatorias con amplitud exponencialmente decreciente ($\lambda_r < 0$) o creciente ($\lambda_r > 0$). La combinación lineal $c_r y_r(t) + c_i y_i(t)$ suele, entonces, escribirse en forma más transparente como

$$c_r e^{\lambda_r t}\cos(\lambda_i t) + c_i e^{\lambda_r t}\sin(\lambda_i t) = Ae^{\lambda_r t}\cos(\lambda_i t + \phi)\,, \qquad \text{(II.5.9)}$$

donde A representa la amplitud inicial, $\lambda_i = \omega = 2\pi f$ representa una frecuencia y ϕ es una constante de fase. Dado que $\cos(\lambda_i t+\phi) = \cos\lambda_i t\cos\phi - \sin\lambda_i t\sin\phi$, tenemos

$$A = \sqrt{c_r^2 + c_i^2},\quad \tan\phi = -c_i/c_r\,.$$

Problema sugerido II.5.1: Hallar la solución general de $\frac{d^4u}{dt^4} - u = 0$.

Ejemplo II.5.1: Ecuación de Euler:

$$\frac{d^n u}{dr^n} + \frac{b_{n-1}}{r}\frac{d^{n-1}u}{dr^{n-1}} + \ldots + \frac{b_1}{r^{n-1}}\frac{du}{dr} + \frac{b_0}{r^n}u = 0\,.$$

Aunque no se trata de una ecuación con coeficientes constantes, podemos llevarla a la forma (II.5.1) con a_i constante mediante el cambio de variables $r \to e^t$. Tenemos $\frac{du}{dr} = \frac{du}{dt}\frac{dt}{dr} = r^{-1}\frac{du}{dz}$, $\frac{d^2u}{dr^2} = r^{-2}[\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{du}{dt}]$, y en general,

$$\frac{d^m u}{dr^m} = r^{-m}\sum_{i=1}^{m}\alpha_{im}\frac{d^i u}{dt^i}\,,$$

con α_{im} constante (y $\alpha_{mm}=1$). Por lo tanto, en la variable t se obtiene una ecuación del tipo (II.5.1) con $a_0=b_0$ y $a_i=\sum_{m=i}^{n}\alpha_{im}$ para $i=1,\ldots,n-1$. Las soluciones son entonces de la forma $u(r)=e^{\lambda t}=r^{\lambda}$, con λ determinado por la ecuación (II.5.7), o, en general, $e^{\lambda t}t^k=r^{\lambda}(\ln r)^k$, y $k=1,\ldots,m-1$, con m la multiplicidad. Los valores de λ pueden también hallarse directamente reemplazando en la ecuación de Euler una solución de la forma $u(r)=r^{\lambda}$. Se dejan los detalles para el lector.

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{du}{dr}-a^2u=0\,.$$

Reemplazando $u=r^{\lambda}$ se obtiene

$$\lambda(\lambda-1)+\lambda-a^2=0,$$

cuyas raíces son $\lambda_{\pm}=\pm a$. Para $a\neq 0$, la solución general es

$$u(r)=c_+r^a+c_-r^{-a}$$

y la solución particular para $u(1)=u_1$, $u'(1)=v_1$ es

$$u(r)=\frac{1}{2}[u_1(r^a+r^{-a})+\frac{v_1}{a}(r^a-r^{-a})]\,. \tag{II.5.10}$$

Si $a\to 0$, la solución general es $c_1+c_2\ln r$ y la solución para $u(1)=u_1$, $u'(1)=v_1$ es $u(r)=u_1+v_1\ln r$, que puede obtenerse tomando el límite de (II.5.10) para $a\to 0$.

Si $a=i|a|$, $t^a=\cos(|a|\ln r)+i\sin(|a|\ln r)$ y $u(r)=u_1\cos(|a|\ln r)+\frac{v_1}{a}\sin(|a|\ln r)$.

II.5.2. Ecuación diferencial lineal no homogénea de orden n

Consideremos ahora la ecuación

$$\frac{d^nu}{dt^n}+a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1(t)\frac{du}{dt}+a_0(t)u=f(t), \tag{II.5.11}$$

con valores dados de u y sus primeras $n-1$ derivadas en $t=t_0$. La ecuación diferencial puede escribirse como

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=A(t)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{f}(t),\quad \boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix}0\\ \ldots\\ 0\\ f(t)\end{pmatrix}\,. \tag{II.5.12}$$

A partir de la solución general (II.4.16), la primera fila de la solución $\boldsymbol{u}(t)$ (que es la que importa ya que las restantes son sus derivadas) es, entonces,

$$u(t) \;=\; \sum_{j=1}^{n}K_{1j}(t,t_0)u_0^{j-1}+\int_{t_0}^{t}K_{1n}(t,t')f(t')dt' \tag{II.5.13}$$

donde $K_{1j}(t,t_0) = [U(t)U^{-1}(t_0)]_{1j}$, con $U(t)$ una matriz fundamental de soluciones, y $u_0^j = u^{(j)}(t_0)$, $j = 0,\ldots,n-1$, son los valores en $t = t_0$ de u y sus primeras $n-1$ derivadas. El primer término en (II.5.13) es, pues, una solución de la ecuación *homogénea* que satisface las condiciones iniciales, y el segundo, dado por la integral, es una solución particular de la ecuación *inhomogénea* con condiciones iniciales nulas. Dado que $K(t_0,t_0) = I$ (identidad), $w_k(t) \equiv K_{1k}(t,t_0)$ es la solución de la ecuación *homogénea* (II.5.1) que satisface

$$w_k^{(j-1)}(t_0) = \delta_{kj},\ j = 1,\ldots,n$$

es decir, $w_1(t)$ es la que satisface $w_1(t_0) = 1$, con $w_1^{(j)}(t_0) = 0$ para $j = 1,\ldots,n-1$, y $w_n(t)$ aquella que satisface $w_n^{(j)}(t_0) = 0$ para $j = 0,\ldots,n-2$, con $w_n^{(n-1)}(t_0) = 1$. Esta última es la que determina (para $t_0 = t'$) la solución particular de la ecuación inhomogénea

En forma más explícita, si $\{u_1(t),\ldots,u_n(t)\}$ son n soluciones linealmente independientes de la ecuación *homogénea* (columnas de $U(t)$), podemos también reescribir la solución (II.5.13) como

$$u(t) \quad = \quad (U(t)\boldsymbol{c} + U(t)\boldsymbol{v}(t))_1 = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(t) + \sum_{k=1}^{n} v_k(t)u_k(t)\,, \qquad \text{(II.5.14)}$$

donde la primera suma es la solución general de la ecuación homogénea, con $c_1,\ldots,c_n$ constantes arbitrarias (a ser determinadas por las n condiciones iniciales $u^{(k)}(t_0) = u_0^k$, $k = 0,\ldots,n-1$) y la segunda, una solución particular de la ecuación no homogénea (II.5.11). Reemplazando en (II.5.1) se obtiene $U(t)\boldsymbol{v}'(t) = \boldsymbol{f}(t)$ y por lo tanto $\boldsymbol{v}(t) = \int U^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t)dt$, o, en forma explícita,

$$v_k(t) = \int (-1)^{k+n}\frac{W_k(t)}{W(t)}f(t)dt, \quad k = 1,\ldots,n\,, \qquad \text{(II.5.15)}$$

donde $W(t) \equiv W(u_1,\ldots,u_n)$ es el Wronskiano (II.5.4) y $W_k(t)$ el determinante de la matriz obtenida suprimiendo la fila n y la columna k de la matriz que define a $W(t)$. De esta forma, podemos expresar $K_{1n}(t,t')$ en (II.5.13) explícitamente en términos de las n soluciones base $u_1(t),\ldots,u_n(t)$, como

$$K_{1n}(t,t') = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+n}u_k(t)W_k(t')/W(t')\,. \qquad \text{(II.5.16)}$$

Por ejemplo, para una ecuación de segundo orden ($n = 2$), con soluciones independientes $u_1(t)$, $u_2(t)$ de la ecuación homogénea, obtenemos

$$K_{12}(t,t') = \frac{-u_1(t)u_2(t') + u_2(t)u_1(t')}{W(t')} \qquad \text{(II.5.17)}$$

con $W(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix} = u_1(t)u_2'(t) - u_2(t)u_1'(t)$. La solución general de

$$u'' + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t)$$

será entonces

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) - u_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{u_2(t')f(t')}{W(t')}dt' + u_2(t)\int_{t_0}^{t}\frac{u_1(t')f(t')}{W(t')}dt' \quad \text{(II.5.18)}$$

Problema sugerido II.5.2: Probar (II.5.17)–(II.5.18).

II.5.3. Ecuación de orden n no homogénea con coeficientes constantes

En el caso de coeficientes *constantes* ($a_i(t) = a_i \ \forall\ t$), $K(t, t_0) = \exp[A(t - t_0)] = K(t - t_0)$ y podemos entonces reescribir (II.5.13) como

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} K_{1j}(t - t_0)u_0^j + \int_{t_0}^{t} K_{1n}(t - t')f(t')dt' \quad \text{(II.5.19)}$$

con $w_k(t) = K_{1k}(t)$ las soluciones de la ecuación *homogénea* que satisfacen $w_k^{(j-1)}(0) = \delta_{kj},\ j = 1, \ldots, n$.

Explícitamente, en el caso de n raíces λ_k distintas, las n soluciones linealmente independientes son $u_k(t) = e^{\lambda_k t}$, $k = 1, \ldots, n$, y el Wronskiano es

$$W(u_1, \ldots, u_n) = e^{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)t}\prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)\,. \quad \text{(II.5.20)}$$

La ecuación (II.5.16) conduce, entonces, a

$$K_{1n}(t, t') = K_{1n}(t - t') = \sum_k \frac{e^{\lambda_k(t-t')}}{P'(\lambda_k)}\,, \quad \text{(II.5.21)}$$

donde

$$P(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$$

es el polinomio característico y $P'(\lambda_k) = \prod_{i\neq k}(\lambda_k - \lambda_i)$.

Por ejemplo, para una ecuación de segundo orden ($n = 2$) obtenemos, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$K_{12}(t - t') = \frac{e^{\lambda_1(t-t')} - e^{\lambda_2(t-t')}}{\lambda_1 - \lambda_2}\,. \quad \text{(II.5.22)}$$

Problema sugerido II.5.3: Probar los resultados (II.5.20), (II.5.21), (II.5.22).

Problema sugerido II.5.4: En base a los resultados anteriores, probar que la solución de la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2a\frac{du}{dt} + bu = f(t)$$

que satisface $u(0) = u_0$, $u'(0) = v_0$, es

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-at}[u_0 \cosh(rt) + \frac{v_0 + au_0}{r} \sinh(rt)] \\ &+ \int_0^t e^{-a(t-t')} \frac{\sinh[r(t-t')]}{r} f(t')dt' \,, \end{aligned} \qquad \text{(II.5.23)}$$

con $r = \sqrt{a^2 - b}$. Si $r \to 0$, la fracción en (II.5.23) se reduce a $t - t'$ (y si $r = i\omega$, a $\sin[\omega(t-t')]/\omega$).

II.5.4. Ecuación diferencial lineal de segundo orden

Dado que las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden aparecen asociadas a problemas de Física con mucha frecuencia, resulta conveniente dedicarles esta subsección. Parte de su contenido servirá también para ilustrar lo discutido en la subsección anterior para el caso de orden n. Empecemos considerando la ecuación homogénea

$$\frac{d^2u}{dt^2}+a(t)\frac{du}{dt}+b(t)u=0. \tag{II.5.24}$$

Si $a(t)$ y $b(t)$ son funciones continuas en un cierto intervalo $I=[t_1,t_2]$, entonces la ecuación posee siempre dos soluciones *linealmente independientes* $u_1(t)$ y $u_2(t)$, para $t\in I$, tales que la solución general de la ecuación es de la forma

$$u(t)=c_1\,u_1(t)+c_2\,u_2(t), \tag{II.5.25}$$

con c_1 y c_2 dos constantes arbitrarias. Estas dos constantes se pueden determinar conociendo las condiciones iniciales $u(t_0)=u_0$ y $u'(t_0)=u'_0$, donde $t_0\in I$. Para $a(t)$ y $b(t)$ continuas en I vale el teorema de unicidad de la solución; por lo tanto, la solución $u(t)$ que satisface las condiciones iniciales es única. En otras palabras, el sistema algebraico de dos ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} c_1\,u_1(t_0)+c_2\,u_2(t_0)&=u_0\\ c_1\,u'_1(t_0)+c_2\,u'_2(t_0)&=u'_0 \end{aligned} \tag{II.5.26}$$

posee siempre una única solución para las constantes c_1 y c_2. Esto, a su vez, implica que el wronskiano debe ser no nulo para $t=t_0$. Pero, como t_0 es un punto cualquiera del intervalo, la unicidad implica que si $u_1(t)$ y $u_2(t)$ son dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea; entonces, el wronskiano $W(u_1,u_2)\neq 0\,\forall t\in I$. Por otro lado, como ya se enfatizó en el caso general, $W(v_1,v_2)$ puede anularse en un cierto punto, aun cuando $v_1(t)$ y $v_2(t)$ sean funciones independientes, pero en ese caso no serán soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden.

En este punto parece oportuno mencionar que no existe un método general simple y directo para hallar las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, cuando las funciones $a(t)$ y $b(t)$ son funciones generales, no constantes. Sin embargo, si $a(t)$ y $b(t)$ se pueden desarrollar en series de potencias alrededor de algún punto t_0, entonces es posible proponer un desarrollo similar para la solución: $u(t)=\sum_{j=0}^{\infty}a_j(t-t_0)^j$. Reemplazando esta serie en la ecuación se puede obtener una relación recursiva para los coeficientes a_j. Esta metodología se tratará en detalle más adelante, en el contexto del problema de Sturm-Liouville (III.1).

Por otro lado, sí existe un método general simple para encontrar la segunda solución linealmente independiente $u_2(t)$, si se conoce una solución no nula $u_1(t)$.

II.5.5. Método general para hallar la segunda solución de una ecuación lineal homogénea de segundo orden

Supongamos que se conoce una solución $u_1(t)$ de la ecuación lineal

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0. \tag{II.5.27}$$

La otra solución linealmente independiente puede hallarse proponiendo una solución del tipo

$$u_2(t) = v(t)u_1(t)$$

En efecto, reemplazando esta expresión en (II.5.27) obtenemos para v la ecuación

$$u_1(t)v'' + (2u_1'(t) + a(t)u_1(t))v' = 0,$$

que es una ecuación lineal de primer orden en v'. Su solución es $v'(t) = cu_1^{-2}(t)e^{-\int a(t)dt}$, de donde

$$v(t) = c\int dt \frac{e^{-\int a(t)dt}}{(u_1(t))^2}. \tag{II.5.28}$$

Entonces, teniendo ahora la segunda solución particular $u_2(t) = v(t)u_1(t)$ (linealmente independiente de $u_1(t)$ pues $v(t)$ no puede ser constante), también tenemos la solución general de la ecuación homogénea, dada por la combinación lineal $c_1\,u_1(t) + c_2\,u_2(t)$, de acuerdo a lo discutido más arriba.

Aunque éste no resulta siempre el método más cómodo, puede aplicarse para cualquier $a(t)$. Nótese que $v(t)$ no depende explícitamente de $b(t)$. El método puede utilizarse también para determinar el comportamiento de la segunda solución en la vecindad de puntos singulares.

Como ejemplo simple, consideremos la ecuación $u'' - k^2u = 0$, cuyas soluciones son $u(t) = c_\pm e^{\pm kt}$. Si $u_1(t) = e^{kt} \Rightarrow v(t) \propto e^{-2kt}$, de donde $u_2(t) \propto e^{-kt}$. Si tomamos $u_1(t) = \cosh(kt) \Rightarrow v(t) \propto \tanh(kt)$, de donde $u_2(t) = \sinh(t)$.

Como segundo ejemplo, consideremos la ecuación $u'' + 2u' + u = 0$. Su ecuación característica posee una única raíz $\lambda = -1$, que origina la solución $u_1(t) = e^{-t}$. La segunda solución puede obtenerse con este método: Tenemos $v(t) \propto \int \frac{e^{-2t}}{e^{-2t}}dt = t$, de donde $u_2(t) \propto te^{-t}$.

II.5.6. Ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes constantes

Consideremos el caso en que los coeficientes son constantes,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2a\frac{du}{dt} + bu = 0. \tag{II.5.29}$$

Para $a = \gamma/(2m) > 0$, $b = k/m > 0$, esta ecuación determina la posición $u(t)$ de una partícula de masa m unida a un resorte de constante $k > 0$ en un medio viscoso con fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad ($m\frac{d^2u}{dt^2} = -ku - \gamma\frac{du}{dt}$).

Las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$ son

$$\lambda_\pm = -a \pm r, \quad r = \sqrt{a^2 - b}\,.$$

Si $r \neq 0$, la solución general es, entonces,

$$u(t) = c_+ e^{\lambda_+ t} + c_- e^{\lambda_- t} \tag{II.5.30}$$

y la solución para $u(0) = u_0$, $u'(0) = v_0$ es

$$u(t) = e^{-at}[u_0 \cosh(rt) + \frac{v_0 + au_0}{r} \sinh(rt)]\,. \tag{II.5.31}$$

Si $r = 0$ ($a^2 = b$) la solución general es

$$u(t) = c_1 e^{-at} + c_2 e^{-at} t \tag{II.5.32}$$

y la solución que satisface $u(0) = u_0$, $u'(0) = v_0$ es

$$u(t) = e^{-at}[u_0 + (v_0 + au_0)t]\,, \tag{II.5.33}$$

que puede obtenerse de (II.5.31) tomando el límite $r \to 0$.

Si $a^2 > b$, r es real y por lo tanto $\lambda_\pm$ son reales. En el caso de la partícula, esto corresponde a $\gamma > \sqrt{4mk}$, es decir, a amortiguamiento fuerte. Las ecuaciones (II.5.30) o (II.5.31) describen, en este caso, un decrecimiento *exponencial* de $u(t)$, ya que $\lambda_\pm < 0$ ($r < a$). El sistema *no* realiza oscilaciones. El caso límite $a^2 = b$ corresponde a $\gamma = \sqrt{4mk}$, donde tampoco se producen oscilaciones.

Si $a^2 < b$, $r = i\omega$, con $\omega = \sqrt{b - a^2}$ real y $\cosh(rt) = \cos(\omega t)$, $\sinh(\omega t) = i\sin(\omega t)$ en (II.5.31), por lo que

$$u(t) = e^{-at}[u_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0 + au_0}{\omega} \sin(\omega t)]\,. \tag{II.5.34}$$

En el caso de la partícula, esto corresponde a $\gamma < \sqrt{4mk}$, es decir, a amortiguamiento débil. Las ecuaciones (II.5.31) o (II.5.34) representan en este caso un movimiento oscilatorio *amortiguado*, con "frecuencia angular" $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4mk}}$ y una amplitud que disminuye exponencialmente, proporcional a $e^{-\gamma t/(2m)}$.

Por supuesto, si $\gamma = 0$ ($a = 0$), obtenemos la solución para el oscilador armónico simple,

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)\,,$$

con $\omega = \sqrt{k/m}$.

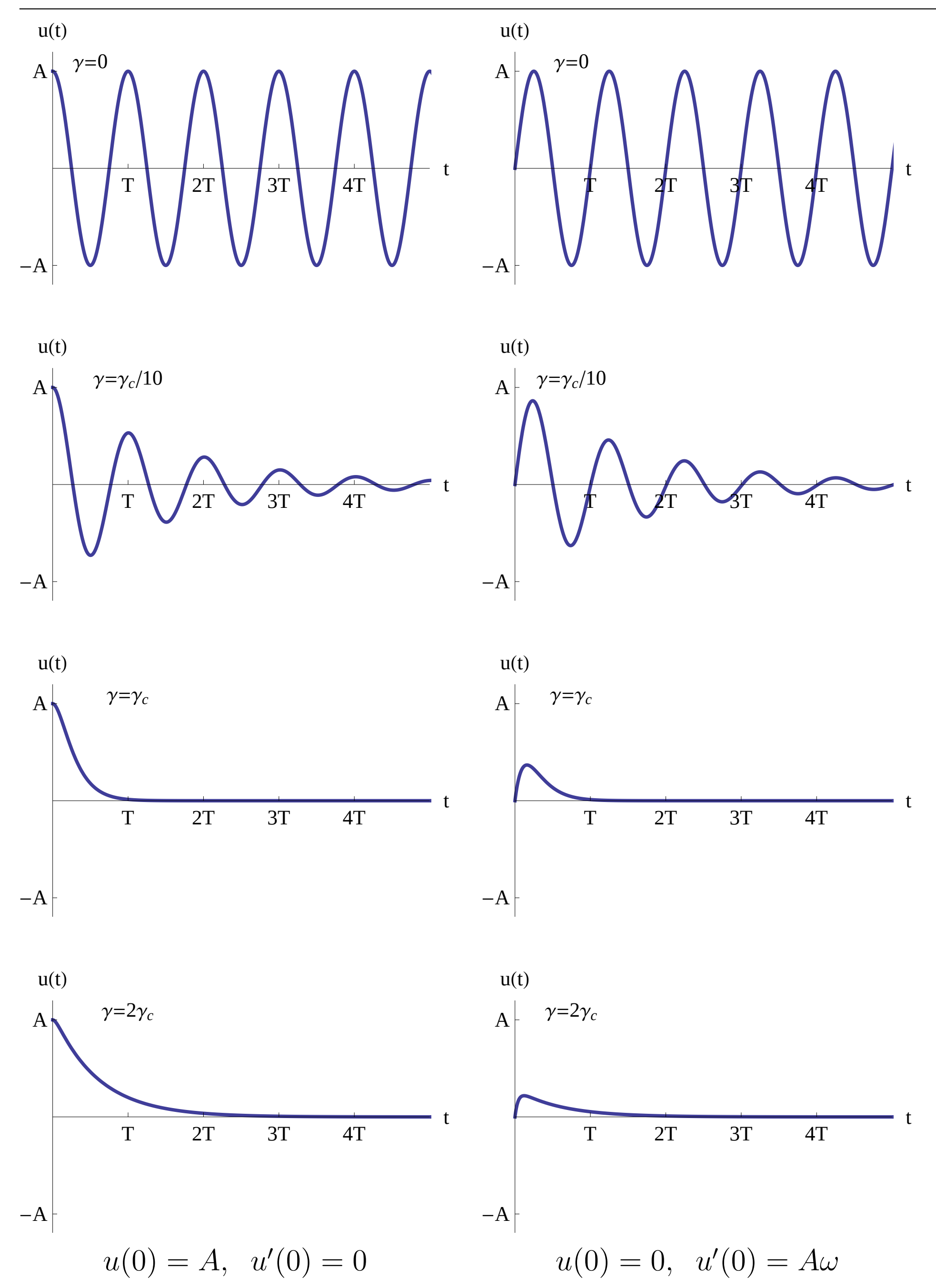


Figura 12: Movimiento oscilatorio armónico y amortiguado: Gráficas de la solución $u(t)$, ecs. (II.5.31)–(II.5.34), para $a = \gamma/(2m) > 0$, $b = k/m > 0$. La columna izquierda corresponde a condiciones iniciales $u(0) = A$, $u'(0) = 0$ (velocidad inicial nula, partiendo de la posición A) y la derecha a $u(0) = 0$, $u'(0) = A\omega$ (velocidad inicial fija, partiendo del punto de equilibrio). La primera fila representa el movimiento oscilatorio armónico ($\gamma = 0$), la segunda el movimiento subamortiguado ($0 < \gamma < \gamma_c$, con $\gamma_c = \sqrt{4mk}$), la tercera el caso crítico ($\gamma = \gamma_c$) y la cuarta el movimiento sobreamortiguado ($\gamma > \gamma_c$). En todos los casos, $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ es el período del movimiento oscilatorio en ausencia de roce.

II.5.7. Ecuación lineal no homogénea de segundo orden. Método general y método de coeficientes indeterminados

Estudiemos ahora la ecuación

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a(t)\frac{du}{dt} + b(t)u = f(t). \tag{II.5.35}$$

Como sabemos, su solución general es de la forma

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

donde $u_h(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)$ es la solución general de la ecuación homogénea y $u_p(t)$ es una solución particular de la ecuación inhomogénea.

Utilizando el método general (II.5.18), dadas dos soluciones independientes $u_1(t)$, $u_2(t)$ de la ecuación homogénea, sabemos que podemos obtener $u_p(t)$ como

$$\begin{aligned} u_p(t) &= -u_1(t)\int_{t_0}^{t}\frac{u_2(t')f(t')}{W(t')}dt' + u_2(t)\int_{t_0}^{t}\frac{u_1(t')f(t')}{W(t')}dt' \\ &= \int_{t_0}^{t} k(t,t')f(t')dt'\,, \;\; k(t,t') = \frac{-u_1(t)u_2(t') + u_1(t)u_2(t')}{W(t')}\,, \end{aligned}$$

con $W(t) = u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t)$.

En el caso de una ecuación *con coeficientes constantes,*

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a\frac{du}{dt} + bu = f(t)\,, \tag{II.5.36}$$

si las raíces de la ecuación característica son distintas, tenemos $u_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $u_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ y entonces

$$u_p(t) = e^{\lambda_1 t}\int_{t_0}^{t}\frac{e^{-\lambda_1 t'}f(t')}{\lambda_1 - \lambda_2}dt' - e^{\lambda_2 t}\int_{t_0}^{t}\frac{e^{-\lambda_2 t'}f(t')}{\lambda_1 - \lambda_2}dt' \tag{II.5.37}$$

$$= \int_{t_0}^{t} k(t-t')f(t')dt'\,, \tag{II.5.38}$$

siendo

$$k(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \tag{II.5.39}$$

la solución de la ecuación homogénea que satisface $k(0) = 0$, $k'(0) = 1$.

Problema sugerido II.5.5: Extender las expresiones anteriores al caso $\lambda_1 = \lambda_2$.

Método de coeficientes indeterminados.

Es interesante destacar que, para ciertas formas particulares de $f(t)$ y bajo ciertas condiciones (que implican que $f(t)$ no sea solución de la ecuación homogénea), $u_p(t)$ puede determinarse ensayando una solución similar a $f(t)$. En general esta técnica es aplicable cuando $f(t)$ es una función exponencial (real o compleja), un polinomio de grado s, un producto de exponencial por polinomio o una suma de funciones de este tipo. En todos estos casos la derivada de $f(t)$ es una función del mismo tipo y esto justifica el presente método. Si, en cambio, $f(t)$ es solución de la ecuación homogénea, debe ensayarse una solución de la forma $tf(t)$ si $tf(t)$ no es solución de la homogénea, y $t^2 f(t)$ sí lo es. Ilustramos el método mediante los siguientes ejemplos.

Ejemplo II.5.2: $f(t) = f_0\, e^{\lambda t}$, con f_0 constante.

Proponemos la solución $u_p(t) = B\, e^{\lambda t}$. Reemplazando en (II.5.36) obtenemos

$$B\, e^{\lambda t}(\lambda^2 + a\lambda + b) = A\, e^{\lambda t}. \tag{II.5.40}$$

Si $e^{\lambda t}$ no es solución de la ecuación homogénea, entonces λ no es raíz de la ecuación característica, y B queda determinado por

$$B = \frac{A}{\lambda^2 + a\lambda + b}. \tag{II.5.41}$$

Si, en cambio, $e^{\lambda t}$ es solución de la ecuación homogénea, se modifica la propuesta, planteando $u_p(t) = B\, t\, e^{\lambda t}$. Si $t\, e^{\lambda t}$ también es solución de la homogénea se propone $u_p(t) = B\, t^2\, e^{\lambda t}$.

Problema sugerido II.5.6: Hallar una solución particular de (II.5.36) para $f(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$. Ayuda: Escribir las funciones trigonométricas en términos de exponenciales complejas, y proceder siguiendo el Ejemplo II.5.2, suponiendo que a y b son reales, y tomando la parte real de $u_p(t)$ al final del cálculo. Considerar los casos: i) $i\omega$ no es raíz de la ecuación característica y ii) $i\omega$ sí es raíz. La solución particular será de la forma $C\cos(\omega t + \phi)$ en i) y $Ct\cos(\omega t + \phi)$ en ii).

Ejemplo II.5.3: $f(t)$ es un polinomio de grado m. En este caso, si $\lambda = 0$ no es raíz de la ecuación característica, se propone para $u_p(t)$ un polinomio *completo* del mismo grado m, con coeficientes a determinar. Por ejemplo, para la ecuación

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} - 4u = 4t^2 - \frac{5}{2}, \tag{II.5.42}$$

proponemos $u_p(t) = A\, t^2 + B\, t + C$. Sustituyendo en la ecuación se encuentran tres ecuaciones algebraicas, $-4A = 4$, $2A - 4B = 0$ y $2A + B - 4C = -5/2$, que permiten obtener los coeficientes. La solución es $u_p(t) = -t^2 - \frac{t}{2}$. Si, en cambio, $\lambda = 0$ es raíz de la ecuación característica, se debe proponer, para $u_p(t)$, un polinomio de grado $m + 1$.

Problema sugerido II.5.7: Hallar la solución general de la ecuación $y'' + y' = at + b$. Comparar los resultados obtenidos con el método general (II.5.37) y el de coeficientes indeterminados.

Problema sugerido II.5.8 Discutir el método de coeficientes indeterminados para sistemas de primer orden de $n \times n$: $d\boldsymbol{u}/dt = A\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(t)$.
i) Muestre que si $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}_0 e^{\lambda t}$ y λ no es autovalor de A, puede proponerse una solución particular $\boldsymbol{u}_p(t) = \boldsymbol{v}e^{\lambda t}$. Discuta también el caso en que λ es autovalor de A.
ii) Muestre que si A es no singular y $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}_0 + \ldots + \boldsymbol{f}_m t^m$ es un polinomio (vectorial) de grado m, puede proponerse un polinomio del mismo grado $\boldsymbol{u}_p(t) = \boldsymbol{u}_0 + \ldots + \boldsymbol{u}_m t^m$.

Problema guiado II.5.9: El oscilador armónico forzado. Resonancia.

Considerar la aplicación de una fuerza externa $F(t)$ a una masa m unida a un resorte de constante $k > 0$.
a) Mostrar que la ecuación que describe el movimiento, midiendo la elongación $y(t)$ a partir de la posición de equilibrio, es

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \quad f(t) = F(t)/m, \ \ w = \sqrt{k/m}$$

b) Dar una expresión de la solución general para una fuerza arbitraria.
c) Considerar ahora una fuerza externa de la forma

$$F(t) = F\cos(\omega_{ex} t)$$

tal que la ecuación de movimiento es

$$y'' + \omega^2 y = f\cos(\omega_e t).$$

Mostrar que, si $\omega_e \neq \omega$, la solución general es

$$y(t) = c_1\cos(\omega t) + c_2 \,\text{sen}\,(\omega t) + \frac{f}{\omega^2 - \omega_e^2}\cos(\omega_e t) \quad (\omega_e \neq \omega),$$

y la solución que satisface $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ es

$$y(t) = \frac{f}{\omega^2 - \omega_e^2}[\cos(\omega_e t) - \cos(\omega t)] \quad (\omega_e \neq \omega). \tag{II.5.43}$$

Graficar esta solución y discutir su comportamiento al acercarse ω_e a ω. Mostrar que puede escribirse como

$$y(t) = \frac{2f}{\omega^2 - \omega_e^2}\,\text{sen}\,(\omega_1 t)\,\text{sen}\,(\omega_2 t)$$



con $\omega_1 = (\omega + \omega_e)/2$, $\omega_2 = (\omega - \omega_e)/2$.
d) Mostrar que, si $\omega_e = \omega$ (**resonancia**), la solución general es

$$y(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \,\text{sen}\,(\omega t) + \frac{f}{2\omega} t \,\text{sen}\,(\omega t) \qquad (\omega_e = \omega) \tag{II.5.44}$$

y la solución que satisface $y(0) = y'(0) = 0$ es

$$y(t) = \frac{f}{2\omega} t \,\text{sen}\,(\omega t) \qquad (\omega_e = \omega). \tag{II.5.45}$$

Graficar e interpretar esta solución, y discutir el fenómeno de resonancia.
e) Mostrar que el límite de la solución (II.5.43) para $\omega_e \to \omega$ (y t fijo) es la solución (II.5.45).

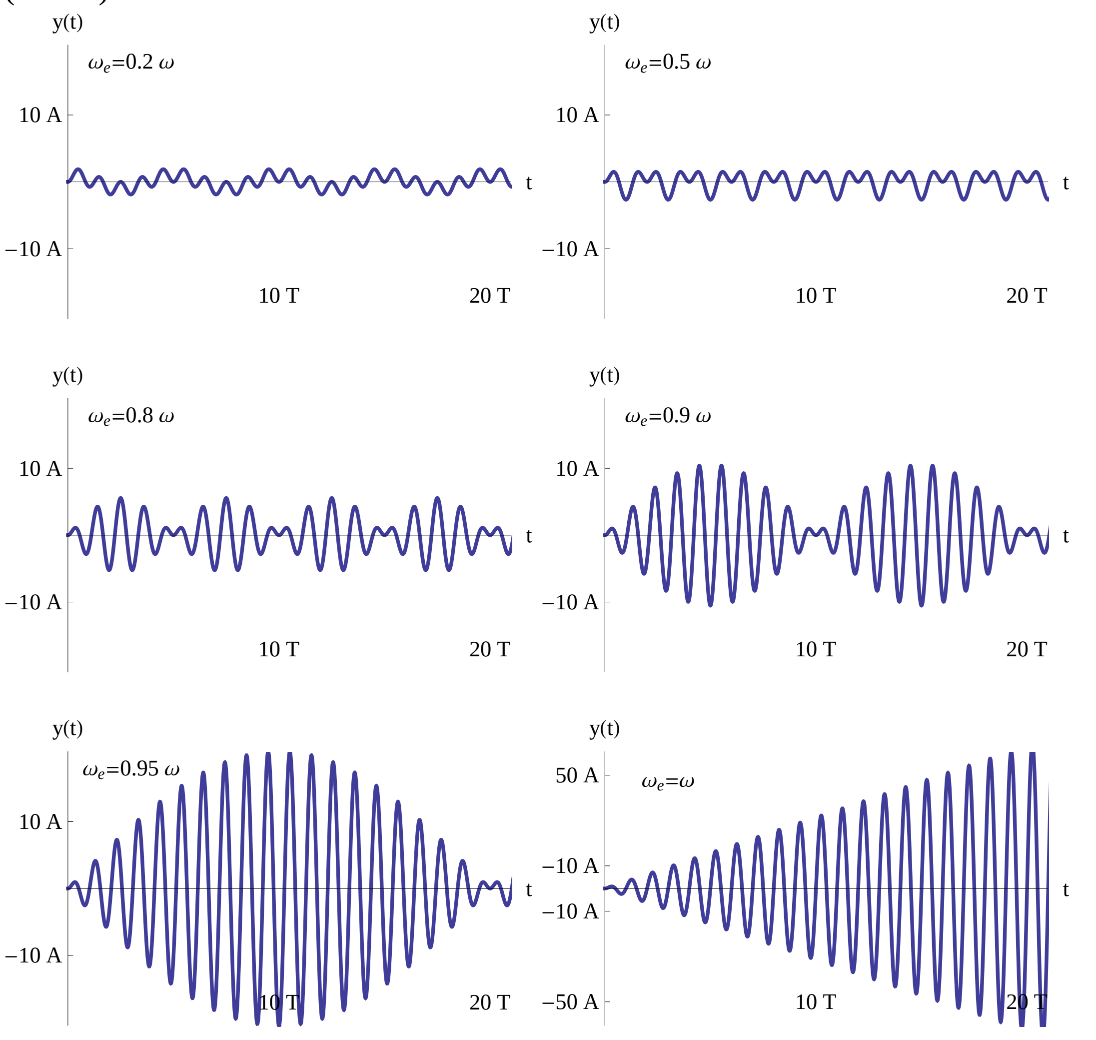
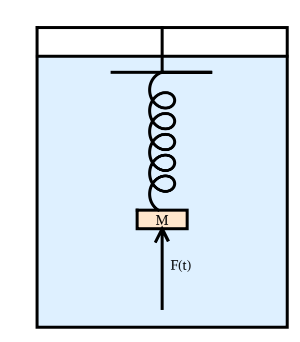


Figura 13: Gráficos de la solución (II.5.43) para distinas frecuencias externas ω_e e intensidad f fija. Nótese el cambio de escala en el caso resonante $\omega_e = \omega$. $T = 2\pi/\omega$ es el período y $A = f/\omega^2$.

.



Problema guiado II.5.10: Oscilador forzado amortiguado. Examinemos ahora el sistema anterior en presencia de una fuerza de roce viscosa $F_r = -\mu y'$.

a) Mostrar que la ecuación que describe el movimiento en presencia de una fuerza externa $F(t)$ es

$$y'' + 2\gamma y' + \omega^2 y = f(t)$$

donde $f(t) = F(t)/m$ y $\gamma = \mu/(2m) > 0$.

b) Mostrar que, para

$$f(t) = f\cos(\omega_e t)\,,$$

una solución particular es

$$\begin{aligned} y_p(t) &= f\frac{(\omega^2-\omega_e^2)\cos(\omega_e t) + 2\gamma\omega_e \operatorname{sen}(\omega_e t)}{(\omega^2-\omega_e^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2} \\ &= \frac{f}{\sqrt{(\omega^2-\omega_e^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}\cos(\omega_e t + \phi)\,. \end{aligned} \tag{II.5.46}$$

Dado que la solución general de la ecuación homogénea disminuye ahora exponencialmente al aumentar t, para tiempos grandes (mayores que el tiempo de relajación) sólo subsiste la solución particular (II.5.46). Si $\omega = \omega_e$, la amplitud de la oscilación resultante crece inicialmente pero se estabiliza rápidamente en el valor dado por la solución particular. Es importante destacar que el sistema termina oscilando con la frecuencia externa y no la frecuencia propia.

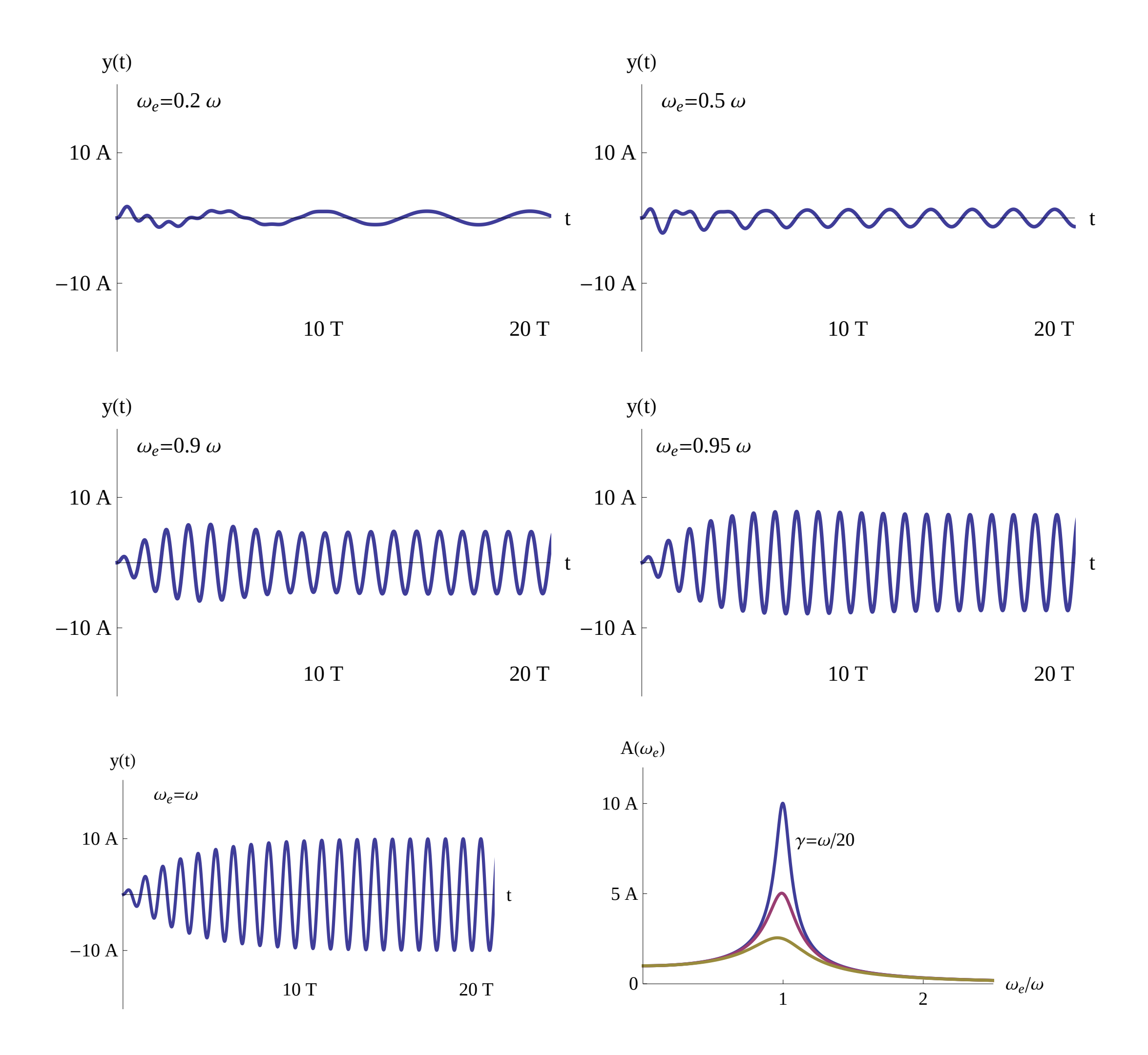


Figura 14: Gráficos de la solución en presencia de roce viscoso con $\gamma = \omega/20$ para $y(0) = y'(0) = 0$. La última figura (II.5.43) muestra la amplitud de la solución particular en función de la frecuencia externa para $\gamma = \omega/20$, $\omega/10$ y $\omega/5$. Es máxima para $\omega_{ex} \approx \omega$.

Problema guiado II.5.11: Sistemas lineales de segundo orden.

Consideremos el sistema de segundo orden homogéneo asociado a una matriz A de $n \times n$,

$$\boldsymbol{u}'' = A\boldsymbol{u}\,, \tag{II.5.47}$$

donde $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)^t$. Esta ecuación surge, por ejemplo, al aplicar la 2^a ley de Newton a sistemas descriptos por fuerzas que dependen linealmente de la posición, tales como masas unidas por resortes y sistemas ligeramente apartados de su punto de equilibrio. El sistema (II.5.47) es equivalente al sistema de $2n$ ecuaciones de primer orden

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}' = \boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{w}' = A\boldsymbol{u} \end{cases}$$

donde $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}'$. Es posible, no obstante, resolver (II.5.47) en forma directa.

a) Si A es independiente de t, proponiendo una solución $\boldsymbol{u}(t) = e^{\alpha t}\boldsymbol{v}$ y reemplazando

directamente en (II.5.47), muestre que se obtiene la ecuación $A\boldsymbol{v} = \alpha^2\boldsymbol{v}$, lo que implica que el sistema (II.5.47) posee soluciones de la forma

$$\boldsymbol{u}^+(t) = e^{\sqrt{\lambda}\,t}\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{u}^-(t) = e^{-\sqrt{\lambda}t}\boldsymbol{v}$$

donde λ es un **autovalor** de A y $\boldsymbol{v}$ un **autovector** asociado.
b) Si A es **diagonalizable**, tal que $A\boldsymbol{v}_i = \lambda_i\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, con $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ linealmente independientes, muestre que un conjunto completo de soluciones de (II.5.47) es

$$\boldsymbol{u}_i^+(t) = e^{\sqrt{\lambda_i}t}\,\boldsymbol{v}_i, \quad \boldsymbol{u}_i^-(t) = e^{-\sqrt{\lambda_i}t}\,\boldsymbol{v}_i$$

si $\lambda_i \neq 0$, y

$$\boldsymbol{u}_i^+(t) = \boldsymbol{u}_i, \quad \boldsymbol{u}_i^-(t) = t\boldsymbol{u}_i$$

si $\lambda_i = 0$, para $i = 1, \ldots, n$. Escriba la solución general. Pruebe también que estas soluciones proveen $2n$ soluciones linealmente independientes del sistema asociado de primer orden, y que este último es no diagonalizable cuando A tiene un autovalor nulo.
c) Muestre que si A es real y $\lambda_i < 0$, las soluciones reales linealmente independientes asociadas a λ_i son

$$\boldsymbol{u}_i^c(t) = \cos(\omega_i t)\,\boldsymbol{v}_i, \quad \boldsymbol{u}_i^s = \operatorname{sen}(\omega_i t)\,\boldsymbol{v}_i\,, \quad \omega_i = \sqrt{-\lambda_i} > 0$$

con $c_{i1}\boldsymbol{u}_i^c(t) + c_{i2}\boldsymbol{u}_i^s(t) = a_i\boldsymbol{v}_i\cos(\omega_i t + \phi_i)$.

Problema sugerido II.5.12: Utilizando el método anterior, resuelva el problema de dos masas iguales (m) unidas cada una a una pared por un resorte de constate k_1 y unidas entre sí por un resorte de constante k_2. Suponga que ambas masas están apoyadas sobre una superficie sin roce.
Muestre que las frecuencias de oscilación del sistema (asumiendo $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $m > 0$) son

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{m}}\,.$$

Encuentre la solución general y discuta los **modos normales** de vibración.

Problema sugerido II.5.13: Resuelva el problema anterior, pero considerando que la segunda masa no está unida a la pared.

Problema sugerido II.5.14: Dé una expresión para la solución general del sistema no homogéneo $\boldsymbol{u}'' = A\boldsymbol{u} + \boldsymbol{f}(t)$, suponiendo que A es diagonalizable.

II.6. Introducción a la Teoría de Distribuciones. Función de Green causal.

II.6.1. La Delta de Dirac como límite de una secuencia

Consideremos la ecuación diferencial lineal inhomogénea $\frac{d^2u}{dt^2} - au = f(t)$. Desde un punto de vista intuitivo, parecería razonable representar la inhomogeneidad $f(t)$ como una suma de términos impulsivos concentrados en intervalos de tiempo muy pequeños, y obtener luego la solución como suma de las soluciones particulares para cada uno de estos términos. La formalización de esta idea requiere el concepto de *distribución* o función generalizada, que discutiremos a continuación.

Consideremos la función

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon & |x| \leq \varepsilon/2 \\ 0 & |x| > \varepsilon/2 \end{cases} \quad \varepsilon > 0. \tag{II.6.1}$$

La misma satisface $\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x)dx = 1 \; \forall \; \varepsilon > 0$. Además, si f es una función continua arbitraria,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x)f(x)dx = \varepsilon^{-1}\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} f(x)dx = \frac{F(\varepsilon/2) - F(-\varepsilon/2)}{\varepsilon}$$

donde F es una primitiva de f. Para $\varepsilon \to 0^+$, $g_\varepsilon(x)$ estará concentrada cerca del origen y obtenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x)f(x)dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{F(\varepsilon/2) - F(-\varepsilon/2)}{\varepsilon} \\ &= F'(0) = f(0). \end{aligned} \tag{II.6.2}$$

Podemos entonces definir la distribución o función generalizada [12] $\delta(x)$ (delta de Dirac) como el límite

$$\delta(x) \text{“}=\text{”} \lim_{\varepsilon\to 0^+} g_\varepsilon(x), \tag{II.6.3}$$

que satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0). \tag{II.6.4}$$

Si bien el límite (II.6.3) no existe estrictamente (es 0 si $x \neq 0$ y es ∞ si $x = 0$), el límite de la integral (II.6.2) $\exists \; \forall \; f$ continua en un entorno de $x = 0$, y eso es lo que simbolizan las ecuaciones (II.6.3)–(II.6.4). Puede obtenerse una buena aproximación a $\delta(x)$ mediante (II.6.3) tomando ε mucho menor que la longitud en la cual f varía apreciablemente. Físicamente, $\delta(x)$ puede interpretarse como la densidad lineal de masa correspondiente a una masa puntual de magnitud 1 localizada en el origen.

Notemos también que, si $ab \neq 0$ y $a < b$,

$$\int_a^b \delta(x)f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^b g_\varepsilon(x)f(x)dx = \begin{cases} f(0) & a < 0 < b \\ 0 & {\scriptstyle a<b<0 \text{ o } 0<a<b} \end{cases} .$$

Consideraremos, en lo sucesivo, *funciones de prueba* f, que son funciones acotadas y derivables a cualquier orden, y que se anulan fuera de un intervalo *finito* I (recordemos ante todo que tales funciones existen: si $f(x) = 0$ para $x \leq 0$ y $x \geq 1$, y $f(x) = e^{-1/x^2}e^{-1/(1-x)^2}$ para $|x| < 1$, f es derivable a *todo* orden en $x = 0$ y $x = 1$). Actuando sobre el espacio de funciones de prueba existen muchas otras funciones $g_\varepsilon(x)$ que convergen a $\delta(x)$, que pueden ser derivables a cualquier orden. Un conocido ejemplo es

$$\delta(x) \quad = \quad \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{e^{-x^2/2\varepsilon^2}}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}. \qquad \text{(II.6.5)}$$

En efecto, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\varepsilon^2}dx = 1\; \forall\varepsilon > 0$ y, como se verá más abajo,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\varepsilon^2} f(x)dx \quad = \quad f(0). \qquad \text{(II.6.6)}$$

La gráfica de $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\varepsilon}e^{-x^2/2\varepsilon^2}$ es la "campana" de Gauss, con área 1 y dispersión $\int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x)x^2dx = \varepsilon^2$. Para $\varepsilon \to 0^+$, $g_\varepsilon(x)$ se concentra alrededor de $x = 0$, pero mantiene su área constante.

En general, si $g_\varepsilon(x)$ está definida $\forall\, x \in \Re$ y $\varepsilon > 0$, diremos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} g_\varepsilon(x) = \delta(x) \;\text{ sii }\; \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x)f(x)dx = f(0)$$

$\forall$ *función de prueba* f.

Por ejemplo, si $g(x) \geq 0\; \forall x$ y $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1}g(x/\varepsilon) = \delta(x).$$

En efecto, si $\varepsilon > 0$, $\varepsilon^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} g(x/\varepsilon)dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)du = 1$ y $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{-1}\int_a^b g(x/\varepsilon)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a/\varepsilon}^{b/\varepsilon} g(u)du = \{{}^{1\;\; a<0<b}_{0\;\; a<b<0 \text{ o } 0<a<b}$.

Por lo tanto, si $|f(x)| \leq M\; \forall x$ y $ab > 0$,

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1}|\int_a^b g(x/\varepsilon)f(x)dx| \leq M \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1}\int_a^b g(x/\varepsilon)dx = 0$. De este modo, si $t > 0$ y f es continua y acotada,

$$I_f \equiv \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} g(x/\varepsilon)f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1}\int_{-t}^{t} g(x/\varepsilon)f(x)dx.$$

Si $m_t \leq f(x) \leq M_t$ para $x \in [-t, t] \Rightarrow m_t \leq I_f \leq M_t\; \forall t > 0$, pero por continuidad de f, $\lim\limits_{t\to 0^+} M_t = \lim\limits_{t\to 0^+} m_t = f(0)$, por lo que $I_f = f(0)$.

Ejemplos muy utilizados son (II.6.5) y, también,

$$\delta(x) = -\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0+} \text{Im}[\frac{1}{x + i\varepsilon}] = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \qquad \text{(II.6.7)}$$

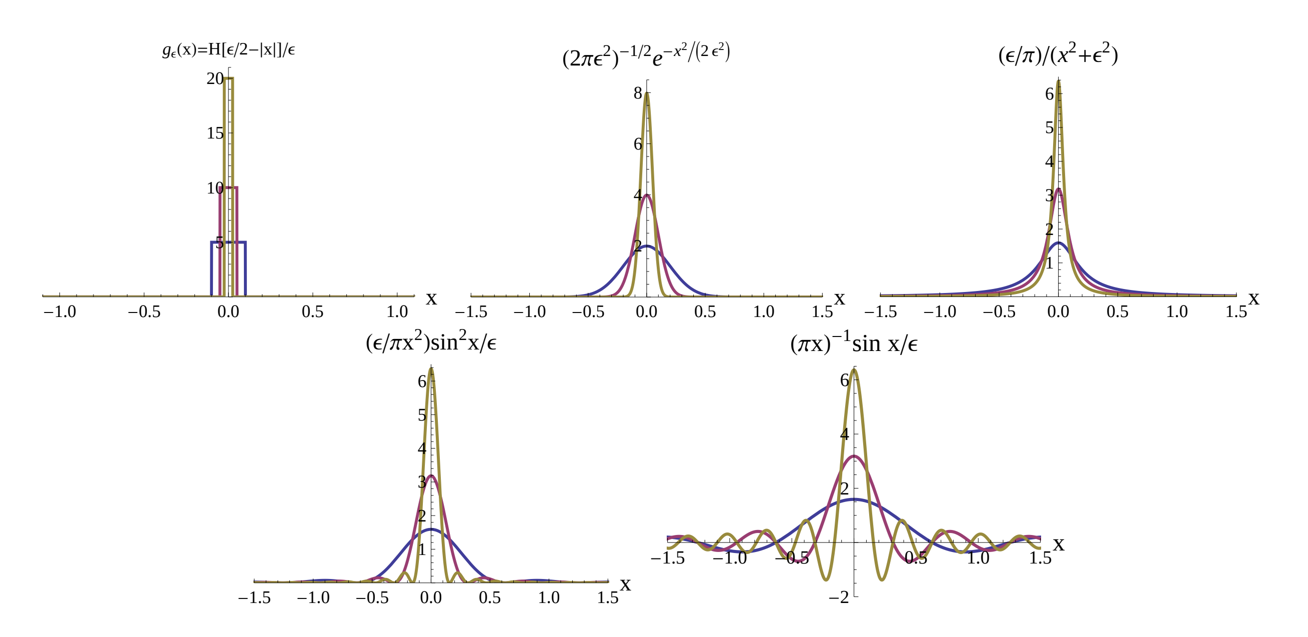


Figura 15: Gráfico de las funciones $g_\epsilon(x)$ definidas en (II.6.1), (II.6.5), (II.6.7), (II.6.8) y (II.6.9), para $\epsilon = 0{,}2$, $0{,}1$ y $0{,}05$.

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon \frac{\sin^2(x/\varepsilon)}{x^2}, \qquad \text{(II.6.8)}$$

que corresponden a $g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ y $g(x) = \frac{\sin^2(x)}{\pi x^2}$. No obstante, existen también funciones $g(x)$ no siempre positivas que satisfacen $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1} g(x/\varepsilon) = \delta(x)$. Por ejemplo la fórmula de Dirichlet,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\sin(x/\varepsilon)}{x} dx = f(0),$$

corresponde a $g(x) = \sin(x)/(\pi x)$ e implica

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\sin(x/\varepsilon)}{\pi x} = \delta(x) \qquad \text{(II.6.9)}$$

aun cuando $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \sin(x/\varepsilon)/x$ es no nulo (no existe) para $x \neq 0$ (sólo es nulo el promedio: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \frac{1}{\varepsilon t} \int_{x_0-t}^{x_0+t} g(x/\varepsilon) dx = 0$ si $0 < t < |x_0|$).

II.6.2. Propiedades básicas de la delta de Dirac

La composición de $\delta(x)$ con otras funciones se define de modo tal que se sigan cumpliendo las reglas usuales de integración. Por ejemplo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) f(u + x_0) du = f(x_0). \qquad \text{(II.6.10)}$$

Asimismo, si $a \neq 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(ax) f(x) dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) f(\frac{u}{a}) du = \frac{1}{|a|} f(0),$$

por lo que

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)\,, \quad a \neq 0. \tag{II.6.11}$$

En particular, $\delta(-x) = \delta(x)$.

Para una función invertible y derivable $g(x)$ que posee una sola raíz x_1 ($g(x_1) = 0$), con $g'(x_1) \neq 0$, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(x)) f(x) dx = \int_{r_-}^{r_+} \delta(u) \frac{f(g^{-1}(u))}{|g'(g^{-1}(u))|} du = \frac{f(x_1)}{|g'(x_1)|},$$

donde $(r_-, r_+) \subset$ en la imagen $g(\Re)$, con $r_\pm \gtrless 0$ y $g^{-1}(0) = x_1$. Por lo tanto, en este caso,

$$\delta(g(x)) = \frac{\delta(x - x_1)}{|g'(x_1)|}. \tag{II.6.12}$$

En general, para una función $g(x)$ derivable con raíces aisladas x_n y $g'(x_n) \neq 0$ tenemos

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|}. \tag{II.6.13}$$

Sin embargo, $\delta(x^2)$ y en general, $\delta(x^n)$, $n > 1$, no están definidas para funciones de prueba arbitrarias. Tampoco lo está el producto $\delta(x)\delta(x) = [\delta(x)]^2$. Notemos también que, si $g(x)$ es una función de prueba,

$$g(x)\delta(x) = g(0)\delta(x). \tag{II.6.14}$$

Derivadas de $\delta(x)$.

Si queremos que se siga cumpliendo la integración por partes, podemos definir también la derivada $\delta'(x)$ tal que (recordar que f se anula fuera de un intervalo finito)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f'(x) dx = -f'(0)$$

y, en general, la derivada enésima $\delta^{(n)}(x)$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0).$$

De este modo,

$$f'(x_0) = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - x_0) f(x) dx, \tag{II.6.15}$$

$$f^{(n)}(x_0) = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x - x_0) f(x) dx. \tag{II.6.16}$$

Notemos también que, si $a \neq 0$,

$$\delta^{(n)}(ax) = \frac{1}{a^n|a|}\delta^{(n)}(x).$$

En particular, $\delta^{(n)}(-x) = (-1)^n\delta^{(n)}(x)$.

Problema sugerido II.6.1: Dada una función $g(x)$ derivable, probar las siguientes igualdades:
a) $g(x)\delta'(x) = g(0)\delta'(x) - g'(0)\delta(x)$,
b) $[\delta(x)g(x)]' = \delta'(x)g(x) + \delta(x)g'(x) = g(0)\delta'(x)$,
c) $[\delta(g(x))]' = \delta'(g(x))g'(x)$.

Problema sugerido II.6.2: La delta de Dirac en n dimensiones se define a través de

$$\int \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)f(\boldsymbol{r})d^nx = f(\boldsymbol{r}_0)\,,$$

donde $\boldsymbol{r} = (x_1, \ldots, x_n)$, $dx^n = dx_1 \ldots dx_n$ y la integral es sobre todo $\mathbb{R}^n$. Esto implica que $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x_1)\delta(x_2)\ldots\delta(x_n)\,$.
i) Mostrar que si $ad - bc \neq 0$, $\delta(ax + by)\delta(cx + dy) = \frac{1}{|ad-bc|}\delta(x)\delta(y)$.
ii) Mostrar que si $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ son diferenciables y se anulan sólo en $x = y = 0$, con $J = \frac{\partial(u_1,u_2)}{\partial(x,y)}|_{x=y=0} \neq 0$, entonces $\delta(u_1(x, y))\delta(u_2(x, y)) = |J|^{-1}\delta(x)\delta(y)$.

II.6.3. Función de Heaviside

Consideremos la función “escalón”

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{II.6.17}$$

Mostraremos que, en el sentido de las distribuciones, $H'(x) = \delta(x)$ (lo que es intuitivamente razonable) de modo que $H(x)$ representa la “primitiva” de $\delta(x)$, al menos en forma simbólica. En efecto, para una función de prueba $f(x)$ obtenemos, integrando por partes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} H'(x)f(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x)f'(x)dx = -\int_{0}^{\infty} f'(x)dx = f(0),$$

de modo que

$$H'(x) = \delta(x).$$

Mediante $H(x)$ podemos escribir una integral en un intervalo finito como una integral en toda la recta, donde los límites quedan determinados por el integrando:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} H(b - x)f(x)dx,$$

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} [H(b - x) - H(a - x)]f(x)dx.$$

II.6.4. Tratamiento formal. Teoría de distribuciones

Consideremos primero un espacio V de vectores de dimensión *finita*, tal como R^n. Podemos definir una forma o funcional lineal como una función $L : V \to \Re$ que asigna a cada vector $\boldsymbol{u} \in V$ un número real $L(\boldsymbol{u})$ y que satisface

$$L(c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2) = c_1 L(\boldsymbol{u}_1) + c_2 L(\boldsymbol{u}_2). \tag{II.6.18}$$

Puede mostrarse que $\exists$ un único vector $\boldsymbol{l}$ tal que

$$L(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{u}) \tag{II.6.19}$$

$\forall\ \boldsymbol{u} \in V$, donde $(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{u})$ denota el *producto interno* de dos vectores ($(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0$, con $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$ sólo si $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})^*$, $(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}) = c_1^*(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{u}) + c_2^*(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u})$). Por ejemplo, en R^n, podemos considerar $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$ (producto escalar usual) y, en C^n, $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}^* \cdot \boldsymbol{u}$.

Desarrollando $\boldsymbol{u}$ en una base *ortonormal* de vectores $\boldsymbol{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$, tales que $(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \delta_{ij}$, tenemos $\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v}_i$ y

$$L(\boldsymbol{u}) = \sum_i c_i L(\boldsymbol{v}_i) = \sum_i c_i l_i = (\boldsymbol{l}, \boldsymbol{u}),$$

donde $l_i = L(\boldsymbol{v}_i)$ y $\boldsymbol{l} = \sum_i l_i^* \boldsymbol{v}_i$. De modo que toda forma lineal L en un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno puede ser identificada con un vector $\boldsymbol{l}$ del espacio.

En espacios de dimensión infinita, tal identificación *no es siempre posible*. Consideremos, por ejemplo, el espacio de funciones "de prueba" D formado por funciones reales $f(x)$ que poseen derivadas de cualquier orden y se anulan fuera de un intervalo finito. Podemos definir el producto interno

$$(g, f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx. \tag{II.6.20}$$

Consideremos ahora la funcional lineal L que asigna a cada función un número real, con

$$L[c_2 f_1 + c_2 f_2] = c_1 L[f_1] + c_2 L[f_2],$$

donde c_1 y c_2 son constantes. Para toda función $g(x) \in D$ podemos asociar la funcional lineal L_g (forma lineal), tal que

$$L_g[f] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx. \tag{II.6.21}$$

Pero podemos también definir la funcional δ tal que

$$\delta[f] = f(0), \tag{II.6.22}$$

aunque es obvio que *no existe* $g \in D$ que satisfaga

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx = f(0) \tag{II.6.23}$$

$\forall\ f \in D$. El espacio de funcionales es pues "más grande" que el de las funciones f. No obstante, por comodidad podemos introducir el símbolo $\delta(x)$ asociado a la funcional anterior, tal que

$$\delta[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0). \tag{II.6.24}$$

Se *define* la derivada de L como

$$L'[f] = -L[f'], \tag{II.6.25}$$

para que se siga cumpliendo formalmente la integración por partes. De esta forma,

$$L_{g'}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} g'(x)f(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f'(x)dx = L'_g[f] \tag{II.6.26}$$

y, en particular,

$$\delta'[f] = -\delta[f'] = -f'(0). \tag{II.6.27}$$

La funcional de Heaviside se define como

$$H[f] = \int_{0}^{\infty} f(x)dx, \tag{II.6.28}$$

que corresponde a $g(x) = H(x)$, con

$$H'[f] = -H[f'] = -\int_{0}^{\infty} f'(x)dx = f(0). \tag{II.6.29}$$

Por lo tanto, $H' = \delta$.

Problema sugerido II.6.3: Demostrar que, considerando a $|x|$ una distribución,

$$\frac{d|x|}{dx} = H(x) - H(-x), \quad \frac{d^2|x|}{dx^2} = 2\delta(x).$$

Las distribuciones son funcionales lineales continuas sobre D. La continuidad significa que si $f_n(x)$ es una sucesión de funciones tal que, para $n \to \infty$, f_n y sus derivadas tienden a 0 uniformemente $\Rightarrow L[f_n] \to 0$. Las distribuciones forman, pues, un *espacio vectorial* (denominado el espacio *dual* de D). Para un espacio finito el dual es equivalente al espacio, pero esto no es necesariamente válido para un espacio de dimensión infinita.

Se dice que una distribución L se anula en un intervalo I si $L[f] = 0\ \forall\ f$ que sea no nula solamente en I. En este caso, $L[f]$ no dependerá de los valores que tome f en I. Con esta definición, podemos decir que $\delta(x) = 0\ \forall\ x \neq 0$ y que $H(x) = 0$ si $x < 0$. El *soporte* de una distribución es el conjunto cerrado de puntos donde L no se anula (o sea, el conjunto cerrado más chico fuera del cual L se anula). De esta forma, el soporte de $\delta(x)$ es el punto $x = 0$ mientras que el soporte de $H(x)$ es el semieje $x \geq 0$. El *soporte singular* de una distribución L_g es el conjunto cerrado más chico fuera del cual L es equivalente a una función $g(x)$ derivable a cualquier orden. El soporte singular de $\delta(x)$ (y también de $H(x)$) es, pues, el punto $x = 0$.

II.6.5. Función de Green de ecuaciones lineales de primer orden

Consideremos, primero, el caso sencillo de una única ecuación lineal inhomogénea de primer orden

$$\frac{du}{dt} - a(t)u = f(t), \tag{II.6.30}$$

es decir,

$$L[u(t)] = f(t), \tag{II.6.31}$$

con $L = \frac{d}{dt} - a(t)$ *un operador lineal*. Hemos visto que la solución para $u(t_0) = u_0$ es

$$u(t) = k(t, t_0)u_0 + \int_{t_0}^{t} k(t, s)f(s)ds, \tag{II.6.32}$$

con

$$k(t, t') = \exp\left[\int_{t'}^{t} a(s)ds\right] = u_h(t)/u_h(t')$$

y $u_h(t) = \exp[\int a(t)dt]$ una solución arbitraria de la ecuación homogénea. Consideremos ahora el caso en que $t_0 \to -\infty$, con $u_0 = 0$, y

$$f(t) = \delta(t - t')\,.$$

Obtenemos, si $t \neq t'$,

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} k(t, s)\delta(s - t')ds = \begin{cases} k(t, t') & t > t' \\ 0 & t < t' \end{cases}\,.$$

La solución anterior es *la función de Green causal* del problema y se la define $\forall t$ en la forma

$$g(t, t') \equiv k(t, t')H(t - t'). \tag{II.6.33}$$

La función de Green desempeña un papel central en la descripción matemática de fenómenos físicos, y se la denomina a veces también función respuesta. La ecuación (II.6.33) representa la respuesta del sistema en t frente a una fuente puntual actuando en t', estando el sistema en reposo para $t < t'$. Debe considerársela como una *distribución*. Queda definida por la ecuación

$$L[g(t, t')] = \delta(t - t') \tag{II.6.34}$$

y la condición inicial $g(t, t') = 0$ si $t \to t'^{-}$. Puede verificarse que la ecuación (II.6.33) satisface (II.6.34), tanto por derivación de la distribución $k(t, t')H(t - t')$ como por aplicación del primer miembro de (II.6.34) a una función de prueba arbitraria. Para $t > t'$, $g(t, t')$ es la solución de la ecuación *homogénea* con la condición inicial $\lim_{t\to t'^{+}} g(t, t') = k(t', t') = 1$. Recordemos también que, a diferencia de $g(t, t')$, $k(t, t')$ es solución del sistema homogéneo: $L[g(t, t')] = 0\ \forall\, t$.

La solución de (II.6.31), con la condición inicial $u_0 = 0$ para $t_0 \to -\infty$, puede entonces escribirse como

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t,t')f(t')dt', \qquad \text{(II.6.35)}$$

donde el límite superior puede extenderse hasta ∞, ya que $g(t,t')$ es nula para $t' > t$. Dado que

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\delta(t-t')dt',$$

la ecuación (II.6.35) puede interpretarse como la suma de las soluciones particulares para cada uno de los términos $f(t')\delta(t-t')$.

Problema sugerido II.6.4: Utilizando (II.6.34) verificar que $L[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')f(t')dt' = f(t)$.

El operador lineal G definido por

$$G[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t,t')f(t')dt'$$

desempeña, entonces, el papel de *inversa* (a derecha) del operador L, ya que $L[G[f(t)]] = f(t)$ $\forall$ función de prueba $f(t)$. Observemos que, si nos restringimos a soluciones que cumplen $u(t_0) = 0$, con $t_0 \to -\infty$, la solución dada por (II.6.35) es la única solución de (II.6.31). Notemos también que la aplicación de L a una función de prueba $u(t)$ puede escribirse en forma similar en términos de una distribución $L(t,t')$: $L[u(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} L(t,t')u(t')dt'$, con $L(t,t') = \delta'(t-t') - a(t)\delta(t-t')$.

Si $a(t)$ depende de t, el operador L no es invariante frente a traslaciones temporales por lo que $g(t,t')$ dependerá en general de t y t' y no sólo de $t-t'$. Por ejemplo, si $a(t) = -2t$, $g(t,t') = e^{-(t+t')(t-t')}H(t-t')$. En cambio, si $a(t) = a$, *constante*, L es invariante frente a traslaciones en el tiempo, por lo que $g(t,t')$ dependerá sólo de la *diferencia* $t-t'$. En este caso,

$$g(t,t') = e^{a(t-t')}H(t-t')$$

y se la escribe, normalmente, como $g(t-t')$.

Mencionemos finalmente que la solución general (II.6.32) puede escribirse, para $t > t_0$, también como

$$u(t) = g(t,t_0)u_0 + \int_{t_0}^{\infty} g(t,t')f(t')dt', \quad t > t_0.$$

II.6.6. Matriz de Green de sistemas lineales

Podemos, ahora, considerar el caso general y volver a la definición de nuestra matriz de Green en la fórmula (II.4.22), y escribirla como distribución

$$G(t,t') \equiv K(t,t')H(t-t') \qquad \text{(II.6.36)}$$

donde

$$K(t,t') = U(t)U^{-1}(t')$$

y $U(t)$ es una matriz fundamental del sistema.

Podemos también escribir el sistema de n ecuaciones lineales,

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - A(t)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}(t), \quad \text{(II.6.37)}$$

como

$$L[\boldsymbol{u}(t)] = \boldsymbol{f}(t), \quad L = I\frac{d}{dt} - A(t)\,, \quad \text{(II.6.38)}$$

con $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{f}$ de $n \times 1$ y A de $n \times n$.

Dado que $K(t,t') = 0$ es solución de la ecuación homogénea, $G(t,t')$ satisface

$$L[G(t,t')] = I\delta(t-t')\,, \quad \text{(II.6.39)}$$

donde I es la identidad de $n \times n$, con $G(t,t') = 0$ para $t \to t'^-$. La solución de (II.6.37) para $\boldsymbol{u}(t_0) = \boldsymbol{0}$ y $t_0 \to -\infty$ puede, entonces, escribirse como

$$\boldsymbol{u}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,t')\boldsymbol{f}(t')dt'. \quad \text{(II.6.40)}$$

En particular, si $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{f}_0\delta(t-t')$, con $\boldsymbol{f}_0$ constante,

$$\boldsymbol{u}(t) = G(t,t')\boldsymbol{f}_0,$$

es decir,

$$u_i(t) = \sum_j G_{ij}(t,t')f_{0j}. \quad \text{(II.6.41)}$$

El elemento de matriz $G_{ij}(t,t')$ representa, entonces, el efecto en el tiempo t en la componente i de una fuente puntual actuando en el tiempo t' en la componente j. Como

$$\lim_{t \to t'^+} G(t,t') = I$$

para $t > t'$, la columna j de $G(t,t')$ es la solución del sistema *homogéneo* con la condición inicial $u_i(t') = \delta_{ij}$. Esto puede utilizarse para hallar $G(t,t')$.

Matriz constante. Si $A(t) = A$, constante $\Rightarrow U(t) = \exp[At]U_0$ y $K(t,t') = \exp[A(t-t')]$, por lo que

$$G(t,t') = \exp[A(t-t')]H(t-t'). \quad \text{(II.6.42)}$$

En este caso, $G(t,t') = G(t-t')$, es decir, es una función de $t-t'$ debido a la invariancia de la ecuación homogénea frente a traslaciones temporales.

II.6.7. Función de Green para la ecuación lineal de orden n

Consideremos ahora la ecuación

$$\frac{d^n u}{dt^n}+a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1(t)\frac{du}{dt}+a_0(t)u=f(t). \tag{II.6.43}$$

Como hemos visto en II.5, esta ecuación puede escribirse como

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}-A(t)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}(t)\,,$$

con

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} u \\ du/dt \\ \ldots \\ d^{n-1}u/dt^{n-1}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ f(t)\end{pmatrix}, \tag{II.6.44}$$

$$A(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ & & \ldots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \ldots & -a_{n-1}(t)\end{pmatrix}. \tag{II.6.45}$$

Consideraremos $a_i(t)$ y $f(t)$ continuas en un intervalo cerrado I, en el cual se aplicarán las consideraciones siguientes.

Como $f(t)$ aparece en la última fila en (II.6.44), y sólo nos interesa conocer $u(t)$, bastará con evaluar el elemento

$$g(t,t')=G_{1n}(t,t')$$

de la matriz de Green, que satisface la ecuación

$$\frac{d^n g}{dt^n}+a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1(t)\frac{dg}{dt}+a_0(t)g=\delta(t-t'), \tag{II.6.46}$$

con $g(t,t')=0$ si $t<t'$, y que, para $t>t'$, es la solución de la ecuación *homogénea* con la condición inicial

$$g(t',t')=0,\ \frac{dg}{dt}|_{t=t'}=0,\ldots\ \frac{d^{n-2}g}{dt^{n-2}}|_{t=t'}=0,\ \frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}}|_{t=t'}=1,$$

(recordemos que $\lim\limits_{t\to t'^+} G(t',t')=I$). Tanto g como las derivadas $\frac{d^k}{dt^k}g(t,t')$ para $k=1,\ldots,n-2$, son, pues, continuas en $t=t'$. Sólo la derivada de orden $n-1$ es discontinua, lo que asegura que se satisfaga (II.6.46). La expresión explícita de $g(t,t')$ puede obtenerse multiplicando el resultado (II.5.16) por $H(t-t')$: $g(t,t')=K_{1n}(t,t')H(t-t')$.

Si tanto u como sus derivadas se anulan para $t=t_0$, y $t_0\to-\infty$, la solución de la ecuación inhomogénea (II.6.43) es

$$u(t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(t,t')f(t')dt'.$$

Si $f(t) = 0$ para $t \leq 0$, $u(t) = \int_0^\infty g(t,t')f(t')dt'$.

En el caso de coeficientes constantes,

$$g(t,t') = g(t-t'), \quad \text{con} \quad g(t) = \{\exp[At]\}_{1n}H(t) = u_n(t)H(t)$$

donde $u_n(t)$ es la solución de la ecuación homogénea con la condición inicial $u_n^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \ldots, n-2$, $u_n^{(n-1)}(0) = 1$.

Ejemplo II.6.1: Ecuación lineal de orden 2 con coeficientes constantes,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2a\frac{du}{dt} + bu = f(t). \tag{II.6.47}$$

Las raíces de la ecuación característica

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2a\lambda + b = 0$$

son $\lambda_\pm = -a \pm r$, con $r = \sqrt{a^2 - b}$. La solución general de la ecuación homogénea es, si $\lambda_+ \neq \lambda_-$,

$$u_h(t) = c_+e^{\lambda_+ t} + c_-e^{\lambda_- t}$$

y la solución para $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$ es

$$u_h(t) = e^{-at}[u_0 \cosh(rt) + \frac{v_0 + au_0}{r}\sinh(rt)]. \tag{II.6.48}$$

La función de Green se obtiene reemplazando $u_0 = 0$, $v_0 = 1$ y multiplicando por $H(t)$:

$$g(t) = \frac{1}{r}e^{-at}\sinh(rt)H(t) \tag{II.6.49}$$

y satisface

$$\frac{d^2g}{dt^2} + 2a\frac{dg}{dt} + bg = \delta(t).$$

Si $r = 0$ ($\lambda_+ = \lambda_-$) la solución de la ecuación homogénea para $u(0) = 0$, $v(0) = 1$ es $u_h(t) = e^{-at}t$ y, entonces,

$$g(t) = e^{-at}tH(t), \tag{II.6.50}$$

resultado que puede obtenerse directamente de (II.6.49) tomando el límite $r \to 0$.

Si $f(t) = 0$ para $t < 0$ y el sistema está en reposo hasta $t = 0$, la solución de (II.6.47) para $t > 0$ es, pues,

$$u(t) = \frac{1}{r}\int_0^t e^{-a(t-t')}\sinh[r(t-t')]f(t')dt'. \tag{II.6.51}$$

Como ejemplo físico, podemos considerar la ecuación de movimiento clásica de una partícula de masa m colgada de un resorte en un medio viscoso, en presencia de una fuerza $F(t)$:

$$m\frac{d^2u}{dt^2} + \gamma\frac{du}{dt} + ku = F(t),$$

donde $\gamma > 0$ es el coeficiente de rozamiento dinámico, $k > 0$ la constante del resorte y u la coordenada vertical medida desde la posición de equilibrio (el peso $-mg$ que aparecería en el lado derecho se cancela al efectuar la traslación $u \to u - mg/k$, donde mg/k es la posición de equilibrio; en forma análoga podemos también cancelar el promedio $\bar{F}(t)$ en un cierto tiempo). Esta ecuación corresponde a

$$a = \frac{\gamma}{2m}, \quad b = \frac{k}{m}, \quad f(t) = \frac{F(t)}{m}.$$

Si $a^2 > b$ ($\gamma^2 > 4mk$) $\Rightarrow r$ es real y $g(t)$ es una combinación de decaimientos exponenciales (como $r < a$, $a \pm r$ son positivos).
Si $a^2 = b$ ($\gamma^2 = 4mk$) $\Rightarrow r = 0$ y obtenemos el resultado (II.6.50).
Finalmente, si $a^2 < b$ ($\gamma^2 < 4mk$) $\Rightarrow r$ es imaginario: $r = i\omega$, con $\omega = \sqrt{b - a^2}$ real, y

$$g(t) = \frac{1}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t) H(t),$$

que representa un movimiento oscilatorio amortiguado para $t > 0$.

Notemos también que, si $a = 0$ (roce nulo),

$$g(t) = \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) H(t)$$

representa un movimiento oscilatorio armónico para $t > 0$, con $\omega = \sqrt{b}$, mientras que si $a = b = 0$,

$$g(t) = tH(t),$$

que representa un movimiento uniforme para $t > 0$. Este caso corresponde a la ecuación

$$\frac{d^2u}{dt^2} = f(t)$$

y su solución para $t > 0$ y $u(0) = u'(0) = 0$ es entonces

$$u(t) = \int_0^t (t - t') f(t') dt'$$

que equivale, tras una integración por partes, a

$$u(t) = \int_0^t dt' \int_0^{t'} f(t'') dt''.$$

Ejemplo II.6.2: Ecuación lineal de orden n con coeficientes constantes:
La ecuación característica es

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Si P posee n raíces λ_k distintas, la solución general de la ecuación homogénea es

$$u_h(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t}.$$

Construyendo la solución particular para $u^{(i)}(0) = 0$ si $i = 0, \ldots, n$–2, con $u^{(n-1)}(0) = 1$, puede mostrarse que (véase (II.5.21))

$$g(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\lambda_k t}}{P'(\lambda_k)} H(t). \qquad \text{(II.6.52)}$$

Como $P(\lambda) = \prod_{k=1}^{n}(\lambda - \lambda_k)$, $P'(\lambda_k) = \prod_{j\neq k}(\lambda_k - \lambda_j)$. Por ejemplo, para $n = 2$ obtenemos

$$g(t) = \frac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} H(t).$$

Reemplazando $\lambda_{\frac{1}{2}} = a \pm r$, se obtiene la ecuación (II.6.49).

Si existen raíces con multiplicidad > 1, $g(t, t')$ puede obtenerse como límite del resultado (II.6.52).

Ejemplo II.6.3: Consideremos la ecuación de primer orden

$$\frac{du}{dt} - au = f_0 e^{\lambda t} H(t). \qquad \text{(II.6.53)}$$

La solución para $t > 0$ y $u(0) = 0$, es, si $a \neq \lambda$,

$$u(t) \;=\; f_0 \int_{-\infty}^{\infty} g(t-t') e^{\lambda t'} H(t') dt' = f_0 \frac{e^{\lambda t} - e^{at}}{\lambda - a}. \qquad \text{(II.6.54)}$$

El primer término $u_p(t) = \frac{f_0}{\lambda - a} e^{\lambda t}$ es una solución particular de la ecuación inhomogénea que puede obtenerse directamente reemplazando $u_p(t) = ce^{\lambda t}$ en (II.6.53), lo que conduce a $c = f_0/(\lambda - a)$. El segundo término $u_h(t) = -\frac{f_0}{\lambda - a} e^{at}$ es una solución de la ecuación homogénea ajustada para que $u(0) = 0$. Si la ecuación homogénea describe un decaimiento $\Rightarrow a < 0$, en cuyo caso $u_h(t)$ es un término “transitorio” que se “apaga” al aumentar t.

Si $\lambda \to a$ en (II.6.54), encontramos como límite

$$u(t) = f_0 e^{at} t, \qquad \text{(II.6.55)}$$

resultado que puede obtenerse directamente de la integral en (II.6.54) para $\lambda = a$. Notemos la dependencia lineal con t.

El resultado (II.6.54) es válido para cualquier $\lambda \neq a$, en particular $\lambda = i\omega$, con ω real, que corresponde al caso de una fuerza periódica sinusoidal. Si a y f_0 son reales, la parte real de (II.6.54) es la solución para $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$ y la parte imaginaria para $f(t) = f_0 \sin(\omega t)$. Vemos de (II.6.54) que la solución particular oscilará con la *misma*

frecuencia externa pero con una amplitud $f_0/(i\omega - a)$ que depende de la frecuencia, y que tiende a 0 para $\omega \to \infty$.

Por ejemplo, en un circuito con inducción L, resistencia R y potencial $V(t)$, la corriente I satisface la ecuación

$$L\frac{dI}{dt} + RI = V(t),$$

que corresponde a $a = -R/L$, $f(t) = V(t)/L$. El caso $\lambda = i\omega$ corresponde a un circuito con corriente alterna $V(t) = V_0 e^{i\omega t}$.

Ejemplo II.6.4:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2a\frac{du}{dt} + bu = f_0 e^{\lambda t} H(t). \tag{II.6.56}$$

La solución para $t > 0$ y $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$, es

$$u(t) = f_0 \int_0^t g(t-t')e^{\lambda t'}dt' = u_p(t) + u_h(t). \tag{II.6.57}$$

Si λ no es raíz de la ecuación característica, es decir, $\lambda \neq \lambda_\pm$, con $\lambda_\pm = -a \pm r$, y $r = \sqrt{a^2 - b}$, obtenemos, para $r \neq 0$,

$$\begin{aligned} u_p(t) &= \frac{f_0 e^{\lambda t}}{(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-)} = \frac{f_0 e^{\lambda t}}{\lambda^2+2a\lambda+b}, \\ u_h(t) &= \frac{-f_0 e^{-at}[\cosh[rt]+(\lambda+a)\sinh[rt]]/r}{(\lambda-\lambda_+)(\lambda-\lambda_-)}. \end{aligned} \tag{II.6.58}$$

Nuevamente, $u_p(t)$ es una solución particular que puede obtenerse reemplazando $u_p(t) = ce^{\lambda t}$ en (II.6.56) y $u_h(t)$ una solución de la ecuación homogénea ajustada de modo tal que $u(0) = 0$.

Si $\lambda \to \lambda_\pm = -a \pm r$ ("resonancia") se tiene

$$u_p(t) = \pm\frac{f_0 e^{\lambda_\pm t}t}{2r}, \quad u_h(t) = \mp\frac{f_0 e^{-at}\sinh[rt]}{2r^2}, \tag{II.6.59}$$

que pueden obtenerse como límite del resultado anterior o por integración de (II.6.57). Si $a = 0$ y $r = i\omega$, con ω real, tenemos el caso propiamente resonante, en el que la amplitud de la oscilación resultante es proporcional a t.

Si $r \to 0$ (raíz doble) y $\lambda \neq -a$,

$$u_p(t) = \frac{f_0 e^{\lambda t}}{(\lambda+a)^2}, \quad u_h(t) = \frac{-f_0 e^{-at}[1 + (a+\lambda)t]}{(\lambda+a)^2}.$$

Finalmente, si $r \to 0$ y $\lambda \to -a$,

$$u_p(t) = \frac{1}{2}f_0 e^{-at}t^2, \; u_h(t) = 0.$$

Por último, mencionemos que para una fuerza $f(t) = f_0 t^n$, con $\lambda_\pm \neq 0$, $u_p(t)$ será, en general, un polinomio de grado n mientras que, si una raíz es nula (por ejemplo, $\lambda_- = 0$), $u_p(t)$, será un polinomio de grado $n + 1$.

Ejemplo II.6.5:

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} - A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}_0 e^{\lambda t} H(t), \tag{II.6.60}$$

con $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{f}_0$ de $n \times 1$, A de $n \times n$. Si $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{0}$, la solución para $t > 0$ es

$$\boldsymbol{u}(t) = \int_0^t \exp[A(t-t')]\boldsymbol{f}_0 e^{\lambda t'} dt' \ = \boldsymbol{u}_p(t) + \boldsymbol{u}_h(t), \tag{II.6.61}$$

donde $\boldsymbol{u}_p(t)$ es una solución particular de la ecuación inhomogénea y $\boldsymbol{u}_h(t) = \exp[At]\boldsymbol{u}_0$ una solución de la ecuación homogénea que ajusta la condición inicial.

Si λ *no coincide con ningún autovalor* λ_k *de* A, $\boldsymbol{u}_p(t)$ puede elegirse de la forma (método de coeficientes indeterminados)

$$\boldsymbol{u}_p(t) = \boldsymbol{c} e^{\lambda t}.$$

Reemplazando en (II.6.60) se obtiene

$$(\lambda I - A)\boldsymbol{c} e^{\lambda t} = \boldsymbol{f}_0 e^{\lambda t},$$

de donde

$$\boldsymbol{c} = (\lambda I - A)^{-1} \boldsymbol{f}_0.$$

Además, $\boldsymbol{u}_h(t) = -\exp[At]\boldsymbol{c}$ (para que $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{0}$) y entonces

$$\boldsymbol{u}(t) = (e^{\lambda t} I - \exp[At])(\lambda I - A)^{-1} \boldsymbol{f}_0, \quad \lambda \neq \lambda_k. \tag{II.6.62}$$

Para $\lambda = i\omega \neq \lambda_k$, obtenemos el conocido e importante resultado que la solución particular de (II.6.61) tendrá la *misma* frecuencia que el término inhomogéneo, con una amplitud dependiente de la frecuencia.

En cambio, si λ coincide con un autovalor λ_k de multiplicidad m_k, $(\lambda I - A)$ no es invertible y la solución anterior no es válida en general. $\boldsymbol{u}_p(t)$ contendrá términos de la forma $e^{\lambda_k t} t^m$, con $m \leq m_k$, y puede hallarse evaluando (II.6.61) en una base conveniente o bien tomando el límite de (II.6.62). Por ejemplo, si $m_k = 1$, $\boldsymbol{u}_p(t)$ será de la forma

$$\boldsymbol{u}_p(t) = (\boldsymbol{c} + \alpha \boldsymbol{v}_k t) e^{\lambda_k t},$$

donde $A\boldsymbol{v}_k = \lambda_k \boldsymbol{v}_k$. Reemplazando en (II.6.61) obtenemos

$$(\lambda_k I - A)\boldsymbol{c} + \alpha \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{f}_0,$$

de donde puede obtenerse $\boldsymbol{c}$ eligiendo α tal que $\boldsymbol{f}_0 - \alpha \boldsymbol{v}_k$ sea ortogonal a $\boldsymbol{v}_k$.

Capítulo III

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias: Problemas con Condiciones de Contorno

III.1. El problema de Sturm-Liouville

III.1.1. Problemas de Sturm-Liouville no singulares

Hasta ahora hemos visto ecuaciones diferenciales con condiciones *iniciales*. En particular, tratamos la ecuación lineal ordinaria de segundo orden, aquélla en que las constantes de integración se determinaban a partir de los valores de la función incógnita y su derivada primera en un instante inicial $t = t_0$. Ahora comenzaremos a estudiar problemas de segundo orden en los cuales las constantes de integración quedan determinadas, no por condiciones iniciales, sino por *condiciones de contorno*. En tales problemas, el rango de variación de la variable (que representará usualmente una posición) está restringido a un cierto intervalo y las constantes de integración se determinan a partir de los valores de la función incógnita, de su derivada, o de combinaciones lineales de las mismas, en los puntos extremos del intervalo.

Tomemos una ecuación lineal de segundo orden general

$$\frac{d^2u}{dx^2} + A(x)\frac{du}{dx} + B(x)u = F(x)\,, \tag{III.1.1}$$

con $A(x)$, $B(x)$ y $F(x)$ continuas. Tal ecuación es equivalente a

$$-\frac{d}{dx}[p(x)\frac{du}{dx}] + q(x)u = f(x), \tag{III.1.2}$$

donde $f(x) = -p(x)F(x)$, $q(x) = -p(x)B(x)$ y

$$p(x) = e^{\int A(x)dx}$$

es una función *positiva*.

En efecto, como $p'(x) = A(x)p(x)$, se tiene $(pu')' = pu'' + p'u' = p(u'' + A(x)u')$, reduciéndose (III.1.2) a la ecuación (III.1.1) multiplicada por $-p(x)$.

La ecuación (III.1.2) se denomina ecuación de *Sturm-Liouville* inhomogénea (la correspondiente ecuación homogénea se obtiene para $f(x) = 0$) y se escribe usualmente como

$$L[u(x)] = f(x), \tag{III.1.3}$$

donde

$$L = -\frac{d}{dx}[p(x)\frac{d}{dx}] + q(x)$$

es el operador lineal de Sturm-Liouville. Tal operador actúa sobre funciones $u(x)$ dos veces derivables, definidas en un dado intervalo real, $a \leq x \leq b$, y sólo queda completamente definido cuando se especifican los valores de la función incógnita, su derivada primera, o combinaciones lineales de ellas en los extremos (a, b) del intervalo. Tales condiciones se conocen como condiciones de contorno, y las funciones que las satisfacen constituyen el *dominio del operador de Sturm-Liouville*.

Problemas de este tipo aparecen frecuentemente al resolver ecuaciones en derivadas parciales mediante el método de separación de variables, como veremos más adelante.

Cabe insistir aquí en que estudiaremos primero el caso en que $p(x)$, $q(x)$ y $p'(x)$ son funciones reales continuas en $[a,b]$ y $p(x) > 0$ en el mismo intervalo cerrado. En este contexto, un operador de Sturm-Liouville que satisface tales condiciones, se llama no singular. Más adelante, analizaremos el caso en que alguna (o algunas) de estas condiciones no se cumple en alguno de los extremos, que conduce al estudio de las llamadas funciones especiales.

III.1.2. Tipos de condiciones de contorno

Consideraremos primero la ecuación (III.1.3) en un intervalo finito $[a,b]$, con las condiciones de contorno conocidas como condiciones de *Dirichlet* homogéneas,

$$u(a) = u(b) = 0. \tag{III.1.4}$$

El primer punto importante a analizar es la existencia o no de soluciones no triviales $u(x) \neq 0$ de la ecuación *homogénea* $L[u] = 0$, que satisfagan las condiciones (III.1.4). Como veremos, la no existencia de tales soluciones (también llamadas modos cero del operador) es condición necesaria y suficiente para que la ecuación inhomogénea tenga solución única, que podrá obtenerse mediante la función de Green.

Por ejemplo, si

$$L = -\frac{d^2}{dx^2},$$

($p(x) = 1$, $q(x) = 0$), la solución general de la ecuación homogénea $L[u] = 0$ es $u(x) = cx + d$. Si $u(a) = u(b) = 0 \Rightarrow c = d = 0$. La ecuación homogénea sólo admite, pues, la solución trivial.

Como segundo ejemplo, si

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} - k^2,$$

la ecuación $L[u] = 0$ posee la solución $u(x) = ce^{ikx} + de^{-ikx}$, que se puede escribir como

$$u(x) = c' \sin(k(x-a)) + d' \cos(k(x-a)).$$

Si $u(a) = 0 \Rightarrow d' = 0$, y la condición $u(b) = 0$ implica

$$c' \sin[k(b-a)] = 0,$$

que posee una solución no trivial ($c' \neq 0$) *si y sólo si*

$$k(b-a) = n\pi\,, \quad n \in Z.$$

En caso contrario $c' = 0$ y la única solución es $u(x) = 0$.

Las condiciones de contorno (III.1.4) no son más que un caso muy particular. En general, las condiciones de contorno que definen el dominio de un operador de Sturm-Liouville pueden ser de dos tipos: *locales* (o separadas) o *no locales*. Se llama condiciones locales a aquéllas que establecen una relación entre la función incógnita y su derivada en cada borde por separado. Entre éstas, nos concentraremos en las llamadas condiciones de contorno de Robin homogéneas:

$$c_a u(a) + d_a u'(a) = 0, \quad c_b u(b) + d_b u'(b) = 0. , \tag{III.1.5}$$

donde todas las constantes son reales. Si $d_a = d_b = 0$, estas se reducen a las de *Dirichlet* homogéneas mientras que, si $c_a = c_b = 0$, se obtienen las condiciones de *Neumann* homogéneas, $u'(a) = u'(b) = 0$. Por supuesto, puede tenerse también $d_a = c_b = 0$, en cuyo caso se obtienen las condiciones mixtas $u(a) = 0$, $u'(b) = 0$ (Dirichlet en un extremo y Neumann en el otro). Si todos los coeficientes son no nulos, las condiciones de contorno se llaman condiciones de *Robin*. En todos los casos, la condición impuesta en un extremo es independiente de la impuesta en el otro, de ahí proviene el nombre de locales o separadas.

Notemos que el conjunto de funciones que satisfacen condiciones de contorno del tipo (III.1.5) constituye un espacio vectorial (si u_1 y u_2 las satisfacen, $\Rightarrow c_1u_1 + c_2u_2$ también las satisface). No ocurre lo mismo para condiciones de contorno no homogéneas (combinación lineal de u y su derivada igualada a una constante distinta de cero).

Las condiciones de contorno *no locales*, en cambio, establecen una relación entre el valor que toman la función incógnita y su derivada en uno y otro borde. Típicos ejemplos de condiciones de contorno no locales son las condiciones *periódicas*

$$u(a) = u(b), \quad p(a)u'(a) = p(b)u'(b) \tag{III.1.6}$$

y *antiperiódicas*

$$u(a) = -u(b), \quad p(a)u'(a) = -p(b)u'(b) \,. \tag{III.1.7}$$

Volveremos a considerar condiciones de contorno no locales en nuestra sección dedicada a la serie de Fourier (ver Capítulo IV).

III.1.3. Carácter autoadjunto del operador

Una propiedad fundamental del operador L con las condiciones de contorno (III.1.5), (III.1.6) o (III.1.7) es que resulta *autoadjunto*[1]:

Teorema III.1.1 *Si u y v son dos funciones reales que satifacen ambas alguna de las condiciones de contorno (III.1.5), (III.1.6) o (III.1.7) (con las mismas condiciones de contorno para u y v), entonces se cumple*

[1] Más rigurosamente, deberíamos decir que resulta simétrico. Sin embargo, la diferencia entre ambos conceptos es materia de cursos más avanzados. A este nivel y en todo el resto de este libro, obviaremos tal diferencia. Para una discusión detallada sobre este punto véase, por ejemplo, [13]

$$(v, L[u]) = (L[v], u), \tag{III.1.8}$$

donde (v, u) *denota el producto interno usual*

$$(v, u) = \int_a^b v(x)u(x)dx.$$

(hemos supuesto u, v *reales). Se dice, entonces, que* L *es autoadjunto.*

Demostración: En efecto, integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} (v, L[u]) - (L[v], u) &= \int_a^b [v(pu')' - u(pv')']dx \\ &= \int_a^b [(vpu')' - (upv')']dx \\ &= p[vu' - uv']|_a^b = pW(v, u)|_a^b = 0, \end{aligned} \tag{III.1.9}$$

*para las condiciones (*III.*1.5), (*III.*1.6) o (*III.*1.7). Es fácil verificar que el Wronskiano* $W(u, v)$ *se anula independientemente en cada extremo para funciones que satisfacen condiciones de contorno de Robin homogéneas, y que la contribución de un extremo se cancela con la del otro extremo para funciones que satisfacen condiciones de contorno periódicas o antiperiódicas.*

□

Notemos que la noción de operador autoadjunto sobre un espacio de funciones es extensión natural de la definición de matriz autoadjunta. En efecto, en el caso de vectores $\boldsymbol{u}$ de R^n y operadores lineales representados por matrices A reales de $n \times n$, con el producto interno usual $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^n v_i u_i$, A se dice simétrica (o autoadjunta, que es equivalente para matrices reales) si $(\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{u}) = (A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})\ \forall\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in R^n$, o sea, si $\sum_{i,j} v_i A_{ij} u_j = \sum_{i,j} u_i A_{ij} v_j$. Esto implica $A_{ij} = A_{ji}\ \forall\ i, j$, es decir, $A^{\rm tr} = A$. Los operadores lineales reales autoadjuntos en R^n son, pues, representados por matrices A *autoadjuntas*. Pero notar: en el caso de espacios vectoriales de dimensión infinita, los dominios del operador y de su adjunto deben coincidir para que el operador sea autoadjunto, es decir, no basta que las expresiones diferenciales de ambos coincidan. La coincidencia de dominios ocurre en nuestro caso.

Como veremos a continuación, el carácter autoadjunto del operador tiene consecuencias muy importantes: la función de Green asociada, si existe, resulta simétrica ante el intercambio de sus dos variables y se satisface, por lo tanto, la propiedad de reciprocidad (ver sección III.1.4). Por otra parte, el operador tiene un conjunto completo de autofunciones, que son una base del espacio vectorial de funciones en el dominio (ver sección III.1.5).

III.1.4. Función de Green para condiciones de contorno locales. Solución del problema de borde con ecuación diferencial inhomogénea

Consideremos, ahora, la ecuación inhomogénea (III.1.3). Como en los problemas de condiciones iniciales, la herramienta general de resolución será la función de Green $G(x, x')$ del operador L con las condiciones de contorno (III.1.5).

Se define dicha función de Green como la solución de la ecuación (el subíndice en el operador indica que el mismo actúa sobre el primer argumento de la función de Green)

$$L_x[G(x, x')] = \delta(x - x'), \tag{III.1.10}$$

(donde $a < x, x' < b$) que satisface, en su primera variable, las condiciones de contorno (III.1.5), es decir

$$\begin{aligned} c_a G(a, x') + d_a \frac{dG}{dx}(x = a, x') &= 0, \\ c_b G(b, x') + d_b \frac{dG}{dx}(x = b, x') &= 0\,. \end{aligned} \tag{III.1.11}$$

Probaremos a continuación que:

Teorema III.1.2 *i) dicha solución existe y es única si y sólo si la única solución de la ecuación homogénea $L[u(x)] = 0$ con la condición de contorno (III.1.5) es la solución trivial $u(x) = 0 \ \forall \ x \in [a, b]$ (no existen modos cero) y*

ii) en tal caso, existe una única solución de la ecuación inhomogénea (III.1.3) con la condición de contorno (III.1.5), dada por la integral:

$$u(x) = \int_a^b G(x, x') f(x') dx'. \tag{III.1.12}$$

Demostración:

Probaremos primero ii). Resulta claro que, si $G(x, x')$ existe, (III.1.12) es solución de (III.1.3) pues

$$L[u(x)] = \int_a^b L_x[G(x, x')] f(x') dx' = \int_a^b \delta(x - x') f(x') dx' = f(x)\,,$$

donde hemos usado, primero, que L actúa sobre la primera variable, no afectada por la integral, y, en estas condiciones, siempre pueden intercambiarse integral y derivada en el sentido de las distribuciones. Luego, hemos usado la ecuación diferencial que define a la función de Green y, finalmente, la definición de la distribución delta de Dirac.

Además, u cumple la condición de contorno (III.1.5) pues G la cumple en su primera variable, no afectada por la convolución. En efecto

$$c_a u(a) + d_a u'(a) = \int_a^b [c_a G(a,x') + d_a \frac{dG}{dx}(x=a,x')] f(x') dx' = 0$$

$$c_b u(b) + d_b u'(b) = \int_a^b [c_b G(b,x') + d_b \frac{dG}{dx}(x=b,x')] f(x') dx' = 0$$

Hemos mostrado, entonces, que (III.1.12) es solución.

La unicidad de esta solución surge, por el absurdo, una vez probado i). En efecto, si existen v_1 y v_2 tal que $L[v_i(x)] = f(x)$, $i = 1,2$, satisfaciendo ambas (III.1.5) con los mismos coeficientes, por la linealidad de L se tiene $L[v_1(x) - v_2(x)] = L[v_1(x)] - L[v_2(x)] = 0$, lo que implica, por i), que $v_1 - v_2 = 0$ o, equivalentemente, $v_1 = v_2$.

La prueba de i) se verá directamente por construcción de la función de Green.

Sean $u_1(x)$ y $u_2(x)$ dos soluciones de la ecuación homogénea $L[u(x)] = 0$, cada una de las cuales satisface la condición de contorno en uno de los extremos:

$$c_a u_1(a) + d_a u_1'(a) = 0,\ c_b u_2(b) + d_b u_2'(b) = 0. \tag{III.1.13}$$

Por la propiedad de superposición para $L[u(x)] = 0$, siempre existen soluciones únicas $u_1(x)$, $u_2(x)$ no idénticamente nulas que satisfacen estas condiciones. Por ejemplo, si $v_1(x)$ y $v_2(x)$ son dos soluciones cualesquiera linealmente independientes y no nulas de $L[v] = 0$,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= v_1(x)[c_a v_2(a) + d_a v_2'(a)] - v_2(x)[c_a v_1(a) + d_a v_1'(a)], \\ u_2(x) &= v_1(x)[c_b v_2(b) + d_b v_2'(b)] - v_2(x)[c_b v_1(b) + d_b v_1'(b)], \end{aligned}$$

satisfacen (III.1.13).

Por otro lado, para p y q continuos y $p > 0$, no pueden existir dos soluciones linealmente independientes que satisfagan ambas la condición de contorno en uno cualquiera de los extremos del intervalo (pues, de ser así, el determinante de la matriz fundamental, es decir el wronskiano de estas soluciones, sería nulo en ese extremo).

Para $x < x'$, $L[G(x,x')] = 0$ y podemos entonces escribir $G(x,x') = c_1(x')u_1(x)$, que satisface la condición de contorno en $x = a$. Análogamente, si $x > x'$, $G(x,x') = c_2(x')u_2(x)$, que satisface la condición en $x = b$. Por lo tanto,

$$G(x,x') = \begin{cases} c_1(x')u_1(x) & x < x' \\ c_2(x')u_2(x) & x > x' \end{cases} . \tag{III.1.14}$$

Integrando (III.1.10) entre $x' - \varepsilon$ y $x' + \varepsilon$,
con $\varepsilon > 0$, obtenemos

$$-\left[p(x)G'(x,x')\right]\Big|_{x=x'-\varepsilon}^{x=x'+\varepsilon} + \int_{x'-\varepsilon}^{x'+\varepsilon} q(x')G(x,x')dx' = 1\,,$$

donde $G'(x,x') = \frac{d}{dx}G(x,x')$.

Debido a la continuidad de p y q, esta ecuación puede satisfacerse sólo si $G(x,x')$ es continua y su derivada tiene una discontinuidad $-1/p(x')$ en $x=x'$ (es decir, $-p(x)G'(x,x')$ debe ser de la forma $H(x-x')+\phi(x)$, con ϕ continua en $x=x'$, para que $(-pG')'$ contenga un término $\delta(x-x')$).

Esto implica

$$\begin{aligned} c_1(x')u_1(x')-c_2(x')u_2(x') &= 0, \\ c_1(x')u_1'(x')-c_2(x')u_2'(x') &= \frac{1}{p(x')}\,, \end{aligned}$$

con $u'(x)=\frac{du}{dx}$, lo que determina c_1 y c_2:

$$c_1(x') \;=\; -u_2(x')/C, \qquad c_2(x')=-u_1(x')/C\,,$$

donde

$$\begin{aligned} C &= p(x')[u_1(x')u_2'(x')-u_2(x')u_1'(x')] \\ &= [pW(u_1,u_2)]_{x=x'},\ \ W(u_1,u_2)=\left|\begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{array}\right|. \end{aligned}$$

La solución existe sólo si $C\neq 0$, o sea, sólo si el Wronskiano $W(u_1,u_2)$ es no nulo. Esto se cumple si $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son dos soluciones linealmente independientes de $L[u]=0$.

En estas condiciones, C es una constante, independiente de x':

$$\begin{aligned} &[p(u_1u_2'-u_2u_1')]'=p'(u_1u_2'-u_2u_1')+p(u_1u_2''-u_2u_1'') \\ &=u_1(pu_2')'-u_2(pu_1')'=q(u_1u_2-u_2u_1)=0. \end{aligned}$$

El resultado final para $C\neq 0$ es, pues,

$$G(x,x')=\left\{\begin{array}{ll} -u_1(x)u_2(x')/C & x\leq x' \\ -u_1(x')u_2(x)/C & x\geq x' \end{array}\right. . \qquad \text{(III.1.15)}$$

Si $C=0$, la función de Green no existe. En este caso las soluciones $u_1(x)$ y $u_2(x)$ son linealmente dependientes, es decir, $u_2(x)=cu_1(x)$, por lo que $u_1(x)$ satisface la condición de contorno en ambos extremos. Esto implica que, si $C=0$, existe una solución no trivial $u_1\neq 0$ que satisface $L[u_1]=0$ y las condiciones de contorno (III.1.5). En otras palabras, la función de Green existe si y sólo si la única solución de la ecuación homogénea $L[u]=0$ que satisface las condiciones (III.1.5) es $u=0$. Esto concluye la prueba de i) y, al mismo tiempo, (III.1.15) da una expresión explícita para la función de Green.

□

Nótese que el resultado es completamente análogo al que se obtiene al resolver sistemas de ecuaciones lineales algebraicas $Ax = b$, con A una matriz de $n \times n$, y x, b vectores columna de $n \times 1$. Si la única solución al sistema homogéneo $Ax = 0$ es $x = 0$, entonces existe la inversa A^{-1}, definida por $AA^{-1} = I$, con I la identidad (es decir, $(AA^{-1})_{i,j} = \delta_{ij}$) y, en este caso, la solución de $Ax = b$ es única y está dada por $x = A^{-1}b$ (o sea, $x_i = \sum_j A^{-1}_{ij} b_j$). En cambio, si existe $x \neq 0$ t.q. $Ax = 0$, la inversa A^{-1} no existe.

El operador lineal definido por

$$G[u(x)] = \int_a^b G(x, x')u(x')dx' \qquad \text{(III.1.16)}$$

es, pues, el *inverso* del operador L y se lo denota, también, como L^{-1}.

Notemos que i) el inverso del operador *diferencial* lineal L es un operador lineal *integral* ($G(x, x')$ se conoce como el núcleo del operador integral) y que ii) G depende no sólo de los coeficientes $p(x)$, $q(x)$ de L, sino también de la *condición de contorno*.

Volviendo a la ecuación (III.1.15), observemos también, la simetría

$$G(x, x') = G(x', x)\,, \qquad \text{(III.1.17)}$$

que permite enunciar la

Propiedad de reciprocidad: La respuesta del sistema en x frente a una fuente puntual en x' es idéntica a la respuesta del sistema en x' frente a una fuente puntual en x, aun si p y q dependen de x. Esto se debe al carácter autoadjunto de L. En efecto, debido tal carácter:

$$(L_x G(x, x'), G(x, x'')) = (G(x, x'), L_x G(x, x''))\,.$$

Usando la ecuación diferencial que satisface la función de Green, y la definición de la delta de Dirac:

$$\int_a^b dx\, \delta(x - x')G(x, x'') = \int_a^b dx\, G(x, x')\delta(x - x'')\,,$$

que conduce a

$$G(x', x'') = G(x'', x').$$

A partir de (III.1.17), es fácil ver que el operador inverso G, definido en (III.1.16) es también autoadjunto: $(v, G[u]) = \int_a^b \int_a^b v(x)G(x, x')u(x')dxdx' = (G[v], u)$.

Obsérvese que la función de Green (III.1.15) no es invariante frente a traslaciones espaciales (debido a las condiciones de contorno). La invariancia traslacional está rota, aun si p y q son constantes, por lo que $G(x, x') \neq G(x - x')$.

Utilizando (III.1.15), vemos que la solución (III.1.12) puede escribirse como

$$u(x) = \frac{-1}{C}[u_2(x)\int_a^x u_1(x')f(x')dx' + u_1(x)\int_x^b u_2(x')f(x')dx']$$

y puede verificarse explícitamente que $L[u] = f$. Siempre es posible escribirla en la forma $u(x) = u_p(x) + u_h(x)$, donde u_p es una solución particular de la ecuación inhomogénea ($L[u_p] = f$) y u_h una solución de la ecuación homogénea ($L[u_h] = 0$) ajustada para satisfacer la condición de contorno.

Ejemplo III.1.1 : $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ ($p(x) = 1$, $q(x) = 0$). En este caso, tomando $a = 0$, $b > 0$ y $u(0) = u(b) = 0$,

$$u_1(x) = x, \quad u_2(x) = x - b$$

y $C = x - (x - b) = b$. Obtenemos

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{x(b-x')}{b} & x \leq x' \\ \frac{x'(b-x)}{b} & x \geq x' \end{cases} . \tag{III.1.18}$$

La solución de la ecuación

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \, ,$$

para $0 \leq x \leq b$ con $u(a) = u(b) = 0$ es, entonces,

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^b G(x, x') f(x') dx \\ &= \frac{1}{b}[\int_0^x x'(b-x) f(x') dx' + \int_x^b x(b - x') f(x') dx'] \, . \end{aligned}$$

Por ejemplo, si $f(x) = x^2$ se obtiene

$$u(x) = \frac{1}{12} x(b^3 - x^3) = -\frac{x^4}{12} + x\frac{b^3}{12} \, ,$$

que se compone de la solución particular $-x^4/12$ más la solución de la ecuación homogénea $xb^3/12$, que garantiza que se cumpla $u(0) = u(b) = 0$.

Ejemplo III.1.2: $L = -\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2$, $a = 0$, $b > 0$. En este caso, para $u(a) = u(b) = 0$,

$$u_1(x) = \sin(\omega x), \quad u_2(x) = \sin(\omega(x-b))$$

y $C = \omega[\sin(\omega x)\cos(\omega(x-b)) - \cos(\omega x)\sin(\omega(x-b))] = \omega \sin(\omega b)$.

La función de Green existe sólo si $\sin(\omega b) \neq 0$, es decir, si $\omega \neq n\pi/b$, con $n \in Z$ (ver ejemplo en la sección III.1.1). Cuando existe, se tiene

$$G(x, x') = \frac{1}{\omega \sin(\omega b)} \begin{cases} \sin(\omega x)\sin(\omega(b-x')) & x \leq x' \\ \sin(\omega x')\sin(\omega(b-x)) & x \geq x' \end{cases} .$$

Para $\omega \to 0$ se recupera el resultado (III.1.18).

Si $\omega = ik$, con k real, la función de Green existe $\forall\, k \neq 0$ y se obtiene reemplazando $\omega \to k$, $\sin \to \sinh$ en el resultado anterior.

Ejemplo III.1.3:

Consideremos, nuevamente, $L = -\frac{d^2}{dx^2}$. Si la condición de contorno es $u'(a) = u'(b) = 0$, la función de Green no existe: Tenemos

$$u_1(x) = c_1, \quad u_2(x) = c_2$$

y, por lo tanto, $C = 0$. Esto se debe a que la solución constante $u(x) = c \neq 0$ es solución no nula de $L[u] = 0$ y satisface $u'(a) = u'(b) = 0$. Obsérvese que, en este caso, la solución del problema inhomogéneo, si existe, no es única. En efecto, dada una solución, siempre se le puede sumar una constante arbitraria, que satisface la ecuación homogénea y la condición de contorno.

Ejemplo III.1.4: Consideremos, ahora, $L = -\frac{d^2}{dx^2} - \omega^2$, con la condición $u'(a) = u'(b) = 0$.

Tenemos

$$u_1(x) = \cos(\omega x), \quad u_2(x) = \cos(\omega(x - b)),$$

con $C = -\omega \sin(\omega b)$.

La función de Green existe nuevamente sólo si $\sin(\omega b) \neq 0$, es decir, si $\omega \neq n\pi/b$, con $n \in Z$. En esas condiciones,

$$G(x, x') = \frac{1}{\omega \sin(\omega b)} \begin{cases} \cos(\omega x)\cos(\omega(b - x')) & x \leq x' \\ \cos(\omega x')\cos(\omega(b - x)) & x \geq x' \end{cases}.$$

Si $\omega \to 0$, $|G(x, x')| \to \infty$.

Por otro lado, si $\omega = ik$, con k real, $G(x, x')$ existe $\forall\, k \neq 0$.

III.1.5. Autovalores y autofunciones del operador de Sturm-Liouville no singular

Consideremos nuevamente el operador de Sturm-Liouville L. Si existen un número λ y una función $v(x)$ no idénticamente nula, que satisfacen la ecuación

$$L[v(x)] = \lambda v(x) \tag{III.1.19}$$

$\forall x \in [a, b]$, *conjuntamente* con alguna de las condiciones de contorno mencionadas en la sección III.1.2, se dice que λ es un *autovalor* (o valor propio) y $v(x)$ una autofunción (o función propia) de L con dominio definido por dicha condición de contorno. Enfatizamos que λ y $v(x)$ dependen tanto de p y q como de la condición de contorno.

Es obvio que, si $v(x)$ es autofunción, $cv(x)$, con c una constante no nula, es también autofunción con el mismo autovalor, por lo que las autofunciones quedan definidas a menos de una constante multiplicativa.

Hemos visto que la función de Green para una determinada condición de contorno local (III.1.5) existe si y sólo si no existe una función $u(x) \neq 0$ que satisfaga $L[u] = 0$ con dichas condiciones. Esto implica que $G(x, x')$ existe si y sólo si L no posee *ningún autovalor nulo* con dicha condición de contorno (de allí proviene el nombre de modos cero).

Es fácil mostrar el siguiente teorema general

Teorema III.1.3 *Si L es autoadjunto, las autofunciones de L correspondientes a autovalores distintos son ortogonales con respecto al producto interno $(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx$.*

Demostración*: Si $L[v_i(x)] = \lambda_i v_i(x)$, $L[v_j(x)] = \lambda_j v_j(x)$,*

$$0 = (v_j, L[v_i]) - (L[v_j], v_i) = (\lambda_i - \lambda_j) \int_a^b v_i(x)v_j(x)dx \,. \qquad \text{(III.1.20)}$$

Si, según la hipótesis, $\lambda_i \neq \lambda_j$ resulta que

$$\int_a^b v_j(x)v_i(x)dx = 0.$$

□

Este teorema general nos permite afirmar que las autofunciones correspondientes a autovalores distintos del operador de Sturm-Liouville que venimos estudiando (con su dominio definido por las condiciones de contorno (III.1.5), (III.1.6) o (III.1.7)) son ortogonales con respecto al producto escalar $(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx$. En efecto se trata de un operador autoadjunto con respecto al mismo producto escalar.

En forma más general, en particular al estudiar funciones especiales, surge un problema similar, en el cual debe encontrarse una función $v(x)$ no idénticamente nula que satisfaga, conjuntamente con la condición de contorno, la ecuación

$$L[v(x)] = \lambda\rho(x)v(x), \qquad \text{(III.1.21)}$$

donde $\rho(x) > 0$ es una función real derivable y *positiva* en (a, b), denominada usualmente "función de peso". En este caso, se dice que λ es autovalor y v autofunción de L con peso ρ (y una dada condición de contorno).

Siguiendo el procedimiento anterior, puede mostrarse que, incluso en el caso singular, si se imponen sobre las autofunciones del problema las condiciones de acotación que se discutirán en la subsección III.2.3, debido al carácter autoadjunto del operador que se demostrará en el teorema III.2.6, las autofunciones correspondientes a autovalores distintos resultan ortogonales con respecto al producto interno

$$(u, v)_\rho \equiv \int_a^b \rho(x) u(x) v(x) dx\,, \qquad \text{(III.1.22)}$$

es decir,

$$\int_a^b \rho(x) v_j(x) v_i(x) dx = 0 \quad \text{si} \quad \lambda_j \neq \lambda_i\,,$$

donde $L[v_i(x)] = \lambda_i \rho(x) v_i(x)$, $L[v_j(x)] = \lambda_j \rho(x) v_j(x)$.

Volveremos sobre este punto en la sección III.2. En nuestro caso no singular, es directo ver que es así reemplazando (III.1.21) en (III.1.20).

Propiedades espectrales del problema de Sturm-Liouville no singular:

El problema de valores propios de un operador de Sturm-Liouville no singular con su dominio definido por condiciones de contorno locales de Robin (III.1.5) o no locales (III.1.6) o (III.1.7), posee las siguientes propiedades fundamentales (la demostración general de las mismas se realiza naturalmente en el marco de cursos más avanzados: ver, por ejemplo, [13]; por lo tanto, no presentaremos aquí tal demostración, aunque la esbozaremos para algunos casos particulares en la subsección III.1.7):

1) Existe un conjunto numerable de autovalores

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \ldots$$

correspondientes a autofunciones $v_1(x), v_2(x), \ldots v_n(x), \ldots$, que satisfacen $L[v_n(x)] = \lambda \rho(x) v_n(x)$ y son *ortogonales* con respecto al producto interno:

$$(v_i, v_j) = \int_a^b \rho(x)\, v_i(x) v_j(x) dx = 0 \;\; \text{si} \;\; i \neq j.$$

Para las condiciones de contorno locales (III.1.5), $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, ya que no pueden existir dos soluciones linealmente independientes de $L[u] = \lambda \rho u$ para un mismo λ que satisfagan ambas condiciones (pues, de ser así, el wronskiano sería nulo).

2) Cualquier función $u(x)$ definida en el intervalo $[a, b]$ que pertenezca al dominio del operador puede escribirse en términos de las autofunciones $v_n(x)$ por medio de una serie absoluta y uniformemente convergente en este intervalo

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x). \qquad \text{(III.1.23)}$$

El conjunto de todas las autofunciones forma, pues, una *base* del espacio vectorial de funciones derivables a segundo orden que satisfacen las condiciones de contorno en el intervalo $[a, b]$. Se dice, entonces, que las autofunciones de L forman un conjunto *completo*. Un desarrollo como (III.1.23) suele llamarse un desarrollo de Fourier generalizado, pues

es una generalización del desarrollo en serie de Fourier propiamente dicho, que estudiaremos en el capítulo IV.

Consecuencias:

a) Suponiendo válido el desarrollo (III.1.23), es fácil mostrar que los coeficientes c_n están dados por

$$c_n = \frac{\int_a^b \rho(x) v_n(x) u(x) dx}{\int_a^b \rho(x) v_n^2(x) dx} = \frac{(v_n, u)_\rho}{(v_n, v_n)_\rho}. \tag{III.1.24}$$

En efecto, multiplicando (III.1.23) por $\rho(x)v_n(x)$ e integrando, encontramos, debido a la *ortogonalidad* de las autofunciones,

$$\begin{aligned}\int_a^b \rho(x) v_n(x) u(x) dx &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b \rho(x) v_m(x) v_n(x) dx \\ &= c_n \int_a^b \rho(x) v_n^2(x) dx,\end{aligned}$$

obteniéndose (III.1.24). Queda también claro que, para una dada u, los coeficientes del desarrollo son únicos. (Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(x) = 0 \Rightarrow c_n = 0 \; \forall \; n$).

b) Base ortonormal: Como hemos dicho, cada autofunción $v_n(x)$ está definida a menos de una constante multiplicativa. Resulta cómodo elegir esas constantes de modo de obtener una base en que las autofunciones (que llamaremos $w_n(x)$) estén *normalizadas*, es decir, $(w_n, w_n)_\rho = \int_a^b \rho(x) w_n^2(x) dx = 1 \; \forall n$, de modo que

$$(w_m, w_n)_\rho = \int_a^b \rho(x) w_m(x) w_n(x) dx = \delta_{mn}.$$

En tal caso,

$$c_n = \int_a^b \rho(x) w_n(x) u(x) dx = (w_n, u)_\rho \, .$$

c) En una base ortonormal, el cuadrado de la *norma* de u, definida por

$$||u|| = (u, u)_\rho^{1/2} = \left[\int_a^b \rho(x) u^2(x) dx \right]^{1/2},$$

puede expresarse como

$$\begin{aligned}||u||^2 &= \sum_{n,m=1}^{\infty} c_n c_m \int_a^b \rho(x) w_n(x) w_m(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2.\end{aligned} \tag{III.1.25}$$

La igualdad anterior se denomina identidad de Parseval y constituye la generalización del teorema de Pitágoras. Es válida para cualquier conjunto completo de funciones ortonormales $\{w_i(x), i = 1, 2, \ldots\}$. Si el conjunto es incompleto, obtenemos en cambio $||u||^2 \geq \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$.

d) Dada la suma finita

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} b_n w_n(x),$$

donde las autofunciones $w_n(x)$ son ortonormales, el error cuadrático medio, definido por

$$\varepsilon_m^2 \equiv ||u(x) - S_m(x)||^2 = \int_a^b \rho(x)[u(x) - S_m(x)]^2 dx,$$

es mínimo para $b_n = c_n = \int_a^b \rho(x) w_n(x) u(x)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \varepsilon_m^2 &= \int_a^b \rho[u^2 - 2\sum_{n=1}^{m} b_n w_n u + \sum_{n,n'=1}^{m} b_n b_{n'} w_n w_{n'}]dx \\ &= ||u||^2 + \sum_{n=1}^{m}[b_n^2 - 2b_n c_n] = ||u||^2 - \sum_{n=1}^{m} c_n^2 + \sum_{n=1}^{m}(c_n - b_n)^2, \end{aligned}$$

obteniéndose el mínimo valor para $b_n = c_n$.

La "mejor" aproximación a $u(x)$ por medio de una suma finita se obtiene, pues, para $b_n = c_n$, si definimos como "mejor" aquella suma que minimiza el error promedio anterior.

La ecuación anterior también muestra que (para $b_n = c_n$), $\sum_{n=1}^{m} c_n^2 = ||u||^2 - \varepsilon_m^2 \leq ||u||^2$, $\forall\, m$, indicando entonces que $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^2$ es una serie convergente.

III.1.6. Desarrollo de la función de Green en autofunciones. Tipos de convergencia

La propiedad 2) (ecuación (III.1.23)) requiere, para que el desarrollo en autofunciones converja absoluta y uniformemente, que la función a desarrollar admita derivada segunda y satisfaga las condiciones de contorno. Ciertamente, este no es el caso para la función de Green, cuya derivada primera es discontinua. Sin embargo, puede mostrarse que existe para ella un desarrollo de la forma

$$G(x, x') = \sum_n \frac{w_n(x) w_n(x')}{\lambda_n},$$

que converge a $G(x, x')$ débilmente (en el sentido de las distribuciones). Esta claro que tal desarrollo sólo tiene sentido en ausencia de modos cero, en cuyo caso se dice que el operador de Sturm-Liouville es invertible y, a veces, que es no singular (nótese que

el término se utiliza, en este caso, con un sentido totalmente distinto del que venimos adoptando).

Consideremos ahora la ecuación general inhomogénea

$$L[u] = \rho(x)\, f(x), \tag{III.1.26}$$

donde $\rho(x)$ es una función continua y *positiva* (la función de peso previamente introducida) y u debe satisfacer alguna de las condiciones de contorno mencionadas. Suponiendo que podemos desarrollar, tanto u como f, en autofunciones normalizadas $w_n(x)$, con $L[w_n(x)] = \lambda_n \rho(x) w_n(x)$, es decir,

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w_n(x), \quad c_n = \int_a^b \rho(x) w_n(x) u(x) dx \tag{III.1.27}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n w_n(x), \quad f_n = \int_a^b \rho(x) w_n(x) f(x) dx, \tag{III.1.28}$$

se obtiene, al reemplazar en (III.1.26),

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n \lambda_n - f_n) \rho(x) w_n(x) = 0,$$

de donde, suponiendo que $\lambda_n \neq 0$,

$$c_n = f_n / \lambda_n.$$

Se puede llegar al mismo resultado directamente multiplicando la ecuación (III.1.26) por $w_n(x)$ e integrando:

$$\int_a^b w_n(x) L[u(x)] dx = \int_a^b \rho(x) w_n(x) f(x) dx,$$

de donde, teniendo en cuenta el carácter autoadjunto de L, se obtiene la relación

$$\lambda_n c_n = f_n\,.$$

Podemos, entonces, escribir la solución como

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n w_n(x)}{\lambda_n} = \int_a^b G(x, x') \rho(x') f(x') dx',$$

donde

$$G(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n(x) w_n(x')}{\lambda_n}. \tag{III.1.29}$$

Esta expresión constituye el *desarrollo en autofunciones* de la función de Green $G(x, x')$. Es muy útil y será utilizado y discutido más adelante. Notemos que tal desarrollo tiene sentido si y sólo si no existe ningún autovalor nulo, en acuerdo con discusiones previas.

Es preciso destacar, no obstante, que la convergencia de este tipo de desarrollos es más débil que la convergencia puntual. Sea $S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} c_n w_n(x)$.
Se dice que $S_m(x)$ converge *puntualmente* a $u(x)$ para $m \to \infty$ si $\lim_{m\to\infty} S_m(x) = u(x)$ $\forall\, x \in [a, b]$.
Se dice, en cambio, que $S_m(x)$ converge *en media* a $u(x)$ si

$$\lim_{m\to\infty} ||u(x) - S_m(x)||^2 = 0,$$

donde $||F||^2 = \int_a^b \rho(x)F^2(x)dx$. La convergencia puntual asegura la convergencia en media, pero la última no asegura la primera (ya que, por ejemplo, $S_m(x)$ puede diferir de $u(x)$ en un número finito de puntos sin que esto afecte a la integral). Esto ocurre, por ejemplo, con el desarrollo en autofunciones de funciones $u(x)$ continuas a trozos.

Finalmente, se dice que $S_m(x)$ converge a $u(x)$ *como distribución* (convergencia débil) si

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b S_m(x)\phi(x)dx = \int_a^b u(x)\phi(x)dx$$

para cualquier función de prueba $\phi(x)$ en $[a, b]$. Esta última condición es mucho más débil que las anteriores, ya que ni siquiera requiere que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n w_n(x)$ sea convergente. Por ejemplo, si $\delta(x-x')/\rho(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x) \Rightarrow c_n = \int_a^b w_n(x)\delta(x-x')dx = w_n(x')$, de modo que

$$\delta(x - x') = \rho(x) \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x)w_n(x')\,, \qquad \text{(III.1.30)}$$

donde la igualdad sólo indica igualdad como distribución. La serie de la derecha, de hecho, no converge, pues $\lim_{n\to\infty} w_n(x)w_n(x') \neq 0$. Sin embargo, si $\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n(x)$, con $a_n = (w_n, \phi)_\rho$, $\Rightarrow \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \rho(x)w_n(x)w_n(x')\phi(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n(x') = \phi(x')$, de modo que la serie converge como distribución a $\delta(x - x')$.

Puede verse entonces, a partir de (III.1.29), que

$$L[G(x, x')] = \sum_{n=0}^{\infty} \rho(x)w_n(x)w_n(x') = \delta(x - x').$$

Por lo tanto, $G(x, x')$ también puede obtenerse resolviendo directamente (III.1.26) para $f(x) = \delta(x - x')$.

III.1.7. Problema variacional asociado y completitud

El problema de valores propios de L está asociado a un problema variacional.

Para $u \neq 0$ y derivable, definimos la funcional

$$H[u] = \frac{E[u]}{||u||^2} = \frac{\int_a^b [p(x)u'^2(x) + q(x)u^2(x)]dx}{\int_a^b \rho(x)u^2(x)dx}\,, \qquad \text{(III.1.31)}$$

que satisface $H[\alpha u] = H[u]$ si $\alpha \neq 0$ siendo, por lo tanto, independiente de la norma de u. Veremos luego que $H[u]$ puede interpretarse como una energía. Notemos que $H[u] \geq 0$ si $q(x) \geq 0$.

Podemos preguntarnos ahora cuál de todas las funciones $u(x)$ con derivada segunda, que satisfacen alguna de las condiciones de contorno ya mencionadas, es la que *minimiza* $H(u)$, y cuál es el valor mínimo de $H[u]$ entre estas funciones.

Suponiendo que tal función *existe*, y llamándola v, con $H[v] = \lambda$, debe cumplirse

$$H[v + \delta v] \geq H[v] = \lambda$$

$\forall$ función δv que satisface la condición de contorno.

Considerando ahora δv pequeño, y conservando términos sólo hasta orden δv, obtenemos

$$\begin{aligned} H[v+\delta v] - H[v] &\approx 2||v||^{-2}\int_a^b [pv'(\delta v)' + (q - \lambda\rho)v\delta v]dx \\ &= 2||v||^{-2}\int_a^b [L[v] - \lambda\rho v](\delta v)dx + [pv'\delta v]_a^b\,, \end{aligned} \qquad \text{(III.1.32)}$$

donde hemos integrado por partes el primer término ($\int_a^b pv'(\delta v)'dx = pv'\delta v|_a^b - \int_a^b (pv')'\delta v dx$).

Por lo tanto, si $H[v]$ es mínimo, la ecuación (III.1.32) debe anularse *para cualquier* variación $\delta v(x)$ que satisfaga la condición de contorno.

Consideremos, primero, la condición de contorno de *Dirichlet* $u(a) = u(b) = 0$. En este caso, $\delta v(a) = \delta v(b) = 0$ y el último término en (III.1.32) se anula, lo que implica

$$L[v(x)] - \lambda\rho(x)v(x) = 0, \qquad \text{(III.1.33)}$$

es decir, $v(x)$ debe ser *autofunción* de L con autovalor λ.

Es claro, entonces, que dicha autofunción debe ser aquélla con el autovalor *más bajo*, de modo que $v(x) \propto v_1(x)$ y $\lambda = \lambda_1$.

Notemos que, integrando por partes, $\int_a^b pu'^2 dx = pu'u|_a^b - \int_a^b (pu')'u dx$, por lo que

$$H[u] = \frac{\int_a^b u(x)L[u(x)]dx}{||u||^2} \quad \text{si} \quad pu'u|_a^b = 0. \qquad \text{(III.1.34)}$$

Por lo tanto, si $u(x) = v_n(x)$, con $L[v_n] = \lambda\rho v_n$ y $v_n(a) = v_n(b) = 0$,

$$H[v_n] = \lambda_n$$

de modo que $v = v_1$, con $H[v_1] = \lambda_1$. Si $q(x) \geq 0 \Rightarrow \lambda_1 \geq 0$.

El problema anterior es equivalente a la minimización de $E[u]$ con la condición adicional $||u|| = 1$ lo que, a su vez, es equivalente a la minimización de

$$F[u] = E[u] - \lambda ||u||^2,$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange. La condición estacionaria $F[v + \delta v] = F[v] + O(\delta v)^2$ para δv pequeño conduce nuevamente a la ecuación $L[v(x)] = \lambda \rho(x) v(x)$, por lo que v debe ser autofunción de L y λ el autovalor correspondiente. En estas condiciones, $E[v_1] = \lambda_1 ||v_1||$.

Para las condiciones de *Neumann* ($u'(a) = u'(b) = 0$), puede procederse en forma similar. Sólo cabe aclarar que, en este caso, no es necesario imponer la condición de contorno. La condición $u'(a) = u'(b) = 0$ surge naturalmente al buscar el mínimo *absoluto* de $H[u]$, para anular el último término en (III.1.32) que aparece al integrar por partes. El primer autovalor correspondiente al problema de Neumann es, pues, *menor* que el correspondientes al problema de Dirichlet: $\lambda_1^N \leq \lambda_1^D$.

Consideremos ahora el subespacio S_1 de funciones u que satisfagan la condición de contorno y que sean *ortogonales* a la primera autofunción $v_1(x)$, es decir,

$$(u, v_1)_\rho = \int_a^b \rho(x) v_1(x) u(x) dx = 0.$$

Puede demostrarse, siguiendo un procedimiento similar, que el valor mínimo de $H[u]$ para $u \in S_1$ se obtiene para una función v que debe satisfacer también la ecuación (III.1.33) con la correspondiente condición de contorno, pero que debe ser, obviamente, ortogonal a v_1. Esta función debe, pues, ser proporcional a la autofunción de L con el *segundo autovalor* λ_2. Es decir, $v \propto v_2$, con $\lambda = H[v_2] = \lambda_2 \geq \lambda_1$.

Procediendo en forma análoga, puede probarse que el mínimo de $H[u]$ en el subespacio S_{n-1} formado por funciones ortogonales a $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$, $n \geq 2$, se obtiene para $v \propto v_n$, siendo el valor mínimo $H[v_n] = \lambda_n$. De esta forma puede construirse todo el conjunto de autovalores y autofunciones mediante un procedimiento variacional. Puede probarse también que $\lambda_n^N \leq \lambda_n^D \; \forall \, n$.

El procedimiento anterior permite probar también la completitud del conjunto de autofunciones. Daremos a continuación un bosquejo de la demostración, suponiendo que $\lambda_n \to \infty$ para $n \to \infty$ (véanse los siguientes ejemplos).

Sea $u(x)$ una función de norma finita que satisface la condición de contorno y consideremos el resto

$$R_m(x) = u(x) - S_m(x), \quad \text{(III.1.35)}$$

con

$$S_m(x) = \sum_{n=1}^{m} c_n v_n(x), \quad c_n = (v_n, u)_\rho$$

y $(v_n, v_n)_\rho = 1$ (autofunciones normalizadas). Tenemos

$$(v_n, R_m)_\rho = 0, \quad n = 1, \ldots, m.$$

Por lo tanto, $H[R_m(x)] \geq \lambda_m$, pues $R_m(x)$ es ortogonal a $v_1, \ldots, v_m$. Además, utilizando (III.1.34) y, dado que $\int_a^b R_m(x) L[S_m(x)] dx = 0$, se obtiene

$$H[R_m(x)] = \frac{||u||^2 H[u] - \sum_{n=1}^{m} \lambda_m c_m^2}{||R_m(x)||^2} \geq \lambda_m$$

de donde, si $\lambda_m \geq 0$ (como ocurre para $q(x) \geq 0$),

$$||R_m(x)||^2 \leq \frac{||u||^2 H[u]}{\lambda_m}\,.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{m \to \infty} ||R_m(x)||^2 = 0$$

si $\lambda_m \to \infty$, lo que asegura la convergencia *en media* (pero no la convergencia puntual).

Aproximaciones variacionales. La formulación variacional del problema de autovalores de Sturm-Liouville permite desarrollar aproximaciones variacionales en las que $u(x)$ se aproxima por una cierta función que satisface las condiciones de contorno y que contiene algunos parámetros libres. Estos se optimizan minimizando $H[u]$, lográndose así una *cota superior* a λ_1 (y, en general, a λ_n, si imponemos que $u(x)$ sea ortogonal a $v_1, \ldots, v_{n-1}$).

Ejemplo III.1.5:

Consideremos $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ en $[0, b]$, con $u(0) = u(b) = 0$.
La ecuación $L[v] = \lambda v$, es decir,

$$-\frac{d^2 v}{dx^2} = \lambda v$$

no admite autofunciones con $\lambda = 0$ ya que, en este caso, la solución general es $v = ax + b$ y las condiciones de contorno exigen que se cumpla $a = b = 0$. Tal solución, idénticamente nula, no es, por definición, una autofunción. Dicho de otro modo, el problema de Dirichlet homogéneo no admite modos cero. Para $\lambda \neq 0$, la ecuación diferencial posee la solución general $v(x) = Ce^{i\sqrt{\lambda}x} + De^{-i\sqrt{\lambda}x}$, que puede escribirse como

$$v(x) = A \sin(\sqrt{\lambda}x) + B \cos(\sqrt{\lambda}x).$$

Las condiciones de contorno implican $B = 0$, y $\sin(\sqrt{\lambda}b) = 0$, por lo que $\sqrt{\lambda}b = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Es fácil verificar que, de las autofunciones resultantes, sólo las correspondientes a $n = 1, 2, \ldots$ son linealmente independientes. Es decir, los autovalores están dados por

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{III.1.36}$$

Las correspondientes autofunciones son

$$v_n(x) = A_n \sin(n\pi x/b) \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{III.1.37}$$

con $A_n \neq 0$, y puede verificarse que

$$\int_0^b v_n(x) v_m(x) dx = \delta_{nm} A_n^2 b/2.$$

Las autofunciones normalizadas corresponden, pues, a $A_n = \sqrt{2/b}$.

Para funciones que se anulan en los extremos, el valor mínimo de

$$H[u] = \frac{\int_0^b u'^2(x)dx}{\int_0^b u^2(x)dx} = -\frac{\int_0^b u(x)u''(x)dx}{\int_0^b u^2(x)dx}$$

es, entonces, $\lambda_1 = \pi^2/b^2 \approx 9{,}87/b^2$ y corresponde a $v_1(x) = A_1 \sin(\pi x/b)$.

Problema sugerido III.1.1: Mostrar que, planteando como aproximación variacional una parábola $u(x) = x(b - x)$ que satisface $u(0) = u(b) = 0$, se obtiene $H[u] = 10/b^2 > \lambda_1$ (esto corresponde a reemplazar π por $\sqrt{10}$, que es una aproximación utilizada en la antigüedad y es cota superior de π).

Es importante destacar que este ejemplo corresponde exactamente al problema cuántico no relativista de una partícula en una dimensión, confinada al intervalo $[0, b]$, libre dentro de este intervalo. La función $v(x)$, con $||v||^2 = 1$, representa, en este caso, la función de onda de la partícula, y la ecuación $L[v] = \lambda v$ es la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo, con $E_n = \hbar^2\lambda_n/(2m)$ la energía del estado n. Además, $\frac{\hbar^2}{2m}H[u]$ representa aquí el valor medio de la energía correspondiente a la función de onda $u(x)$, el cual es mínimo para $u(x) = v_1(x)$.

Ejemplo III.1.6: Consideremos, nuevamente, $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ en $[0, b]$ con las condiciones de contorno de Neumann $u'(0) = u'(b) = 0$. En este caso, los autovalores son

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{III.1.38}$$

con autofunciones

$$v_n(x) = B_n \cos(n\pi x/b)\,. \tag{III.1.39}$$

Los autovalores son los mismos que en el caso anterior, pero aparece el autovalor adicional $\lambda_0 = 0$, en cuyo caso $v_0 = B_0$, *constante*, que sí satisface las condiciones de contorno. Se cumple

$$\int_0^b v_n(x)v_m(x)dx = \delta_{nm}B_n^2\{{}^{b}_{b/2}\,{}^{n=0}_{n>0}. \tag{III.1.40}$$

Las autofunciones normalizadas se obtienen para $B_0 = 1/\sqrt{b}$, $B_n = \sqrt{2/b}$, $\quad n = 1, 2, \ldots$.

El valor mínimo de $H[u]$ para esta condición de contorno es $\lambda_0 = 0$ (Aquí hemos llamado, por conveniencia, λ_0 al autovalor más bajo de L).

Ejemplo III.1.7: Nuevamente $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ con las condiciones mixtas $u(0) = 0$, $u'(b) = 0$. Como el problema de Dirichlet, tampoco este problema mixto admite modos cero. Para $\lambda \neq 0$, las presentes condiciones de contorno implican $B = 0$ y $\cos(\sqrt{\lambda}b) = 0$, es decir,

$$\lambda_n = (n + 1/2)^2\pi^2/b^2\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{III.1.41}$$

que son distintos a los hallados en los ejemplos anteriores, con autofunciones

$$v_n(x) = A_n \sin[(n + 1/2)\pi x/b]\,. \tag{III.1.42}$$

Se cumple

$$\int_0^b v_n(x)v_m(x)dx = \delta_{nm}A_n^2 b/2,$$

y las autofunciones normalizadas se obtienen para $A_n = \sqrt{2/b}$.

El valor mínimo de $H[u]$ es $\lambda_1 = \pi^2/4b^2$, intermedio entre el mínimo obtenido con las condiciones de Neumann y aquél obtenido con las de Dirichlet.

Ejemplo III.1.8: Nuevamente $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ con las condiciones de contorno periódicas $u(-b) = u(b)$, $u'(-b) = u'(b)$. Obtenemos las autofunciones

$$v_0 = B_0,\ v_n(x) = B_n \cos(n\pi x/b),\ u_n(x) = A_n \sin(n\pi x/b), \tag{III.1.43}$$

con $n = 1, 2, \ldots$ correspondientes a los autovalores

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_n = n^2\pi^2/b^2, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{III.1.44}$$

Para $n \geq 1$ existen, pues, 2 autofunciones ($v_n(x)$ y $u_n(x)$) por cada autovalor.
Se cumple

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{b} v_n(x)v_m(x)dx &= \delta_{nm}B_n^2\{^{2b \;\; n=0}_{b \;\; n>0}\,, \\ \int_{-b}^{b} u_n(x)u_m(x)dx &= \delta_{nm}A_n^2 b, \quad \int_{-b}^{b} u_n(x)v_m(x)dx = 0\,,, \end{aligned}$$

obteniéndose las autofunciones normalizadas para $B_0 = 1/\sqrt{2b}, \quad B_n = A_n = 1/\sqrt{b}$.

En este caso resulta más cómodo utilizar una base compleja de autofunciones, dada por

$$\begin{aligned} z_n(x) &= C_n e^{i\pi n x/b} \\ &= C_n[\cos(n\pi x/b) + i\sin(n\pi x/b)], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{aligned}$$

que es ortogonal con respecto al producto interno $(u, v) = \int_{-b}^{b} u^*(x)v(x)dx$:

$$\int_{-b}^{b} z_n^*(x)z_m(x)dx = \delta_{nm}|C_n^2|2b.$$

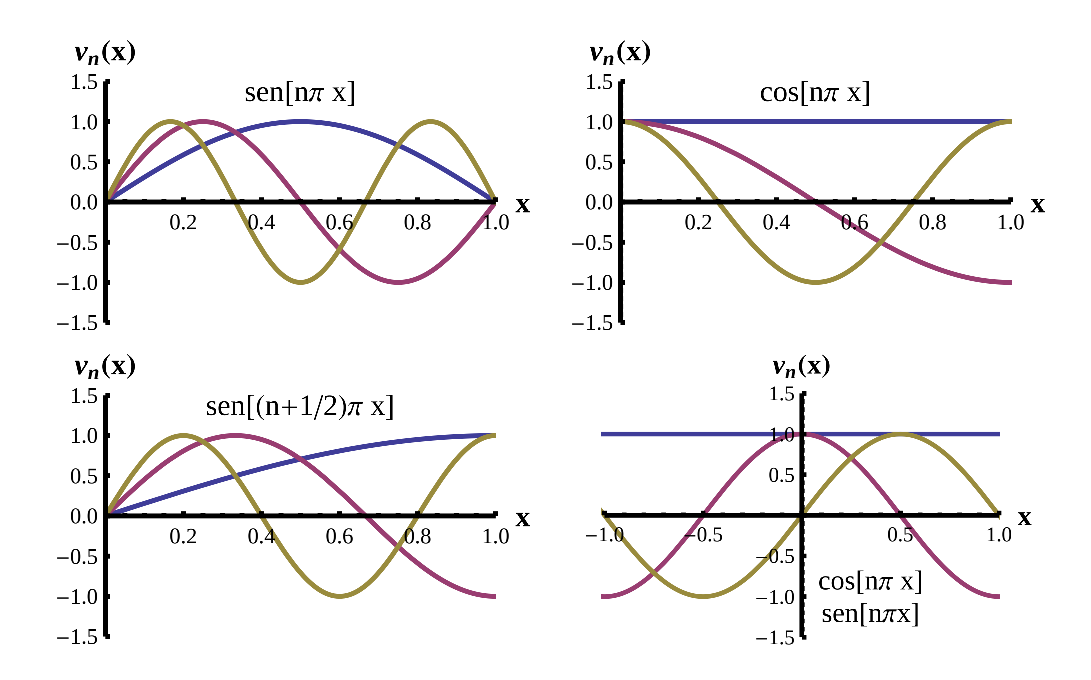


Figura 16: Gráficas de las primeras tres autofunciones de los cuatro ejemplos anteriores para $b = 1$.

III.2. Resolución de ecuaciones lineales homogéneas mediante series de potencias. Funciones Especiales

El formalismo basado en la función de Green, visto ateriormente, permite resolver la ecuación inhomogénea $L[u] = f$ conociendo la solución general de la ecuación homogénea $L[u] = 0$. No hemos dicho, sin embargo, cómo resolver en general esta última ecuación, cuando las funciones $p(x)$, $q(x)$ (o equivalentemente, $A(x)$, $B(x)$) no son constantes. Esta es una cuestión importante y de gran interés práctico, dado que algunas de las soluciones de este tipo de ecuaciones aparecen con frecuencia en aplicaciones a la Física. Ese es el caso de las llamadas *funciones especiales*. A continuación discutiremos cómo encontrar la solución general de la ecuación homogénea en el caso de coeficientes dependientes de la variable, presentando luego algunas de las funciones especiales como ejemplos.

III.2.1. Caso de coeficientes analíticos

Consideremos la ecuación general lineal de segundo orden

$$u'' + A(x)u' + B(x)u = 0. \tag{III.2.1}$$

Teorema III.2.1 *Si $A(x)$ y $B(x)$ son analíticas en un entorno de $x = 0$, es decir,*

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n\,, \quad |x| < R\,, \qquad \text{(III.2.2)}$$

las soluciones de (III.2.1) son analíticas en ese entorno y pueden, pues, representarse como una serie de potencias:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\,, \quad |x| < R\,. \qquad \text{(III.2.3)}$$

Demostración: *Supondremos, primero, que existe una solución del tipo (III.2.3), y probaremos que converge.*

Dado que $B(x)u(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \sum\limits_{m=0}^{n} B_{n-m}c_m$, $A(x)u'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \sum\limits_{m=0}^{n+1} A_{n-m+1}mc_m$, reemplazando (III.2.3) en (III.2.1) se obtiene, luego de definir $B_{-1} = 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n [c_{n+2}(n+2)(n+1) + \sum_{m=0}^{n+1} c_m(mA_{n-m+1} + B_{n-m})] = 0\,.$$

Por lo tanto, como el coeficiente de x^n debe ser nulo,

$$c_{n+2} = -\frac{\sum_{m=0}^{n+1} c_m[mA_{n-m+1} + B_{n-m}]}{(n+2)(n+1)}\,, \quad n \geq 0\,, \qquad \text{(III.2.4)}$$

donde el segundo miembro depende de los coeficientes previos $c_0, \ldots, c_{n+1}$. Se obtiene así una relación recursiva que determina todos los coeficientes c_n para $n \geq 2$ a partir de los dos primeros c_0, c_1. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{A_0c_1 + B_0c_0}{2} \\ c_3 &= -\frac{A_1c_1 + 2A_0c_2 + B_1c_0 + B_0c_1}{6} \\ &= -\frac{c_0(B_1 - A_0B_0) + c_1(A_1 + B_0 - A_0^2)}{6}\,. \end{aligned} \qquad \text{(III.2.5)}$$

Demostraremos ahora que esta serie converge para $|x| < R$. Sea t tal que $0 \leq |x| < t < R$. Como $\lim\limits_{n\to\infty} A_n t^n = \lim_{n\to\infty} B_n t^n = 0$ (condición necesaria de convergencia de las series (III.2.2)), $\exists\, M > 0$ tal que

$$|B_n| \leq M/t^n, \quad |A_n| \leq M/t^{n-1},$$

$\forall\, n$.

Por lo tanto,

$$|c_{n+2}| \leq \frac{M \sum_{m=0}^{n+1} |c_m| t^m (m+1)}{t^n (n+2)(n+1)}\,.$$

Definiendo recursivamente los coeficientes no negativos

$$d_{n+2} = \frac{M \sum_{m=0}^{n+1} d_m t^m (m+1)}{t^n (n+2)(n+1)}\,,$$

con $d_0 = |c_0|$, $d_1 = |c_1|$, *tenemos* $|c_n| \leq d_n \;\forall\; n$. *Además,*

$$d_{n+2} = d_{n+1}\left[\frac{n}{t(n+2)} + \frac{Mt(n+2)}{(n+2)(n+1)}\right],$$

por lo que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+2}|x|^{n+2}}{d_{n+1}|x|^{n+1}} = \frac{|x|}{t} < 1\,,$$

lo que implica, por el criterio del cociente, que $\sum_{n=0}^{\infty} d_n x_n$ *converge absolutamente si* $|x| < t$, *es decir,* $\forall\; |x| < R$. *Esto implica, a su vez, que* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x_n$ *converge absolutamente para* $|x| < R$.

La solución general puede, por lo tanto, escribirse como

$$u(x) = c_0 u_1(x) + c_1 u_2(x)\,,$$

con u_1 *la solución para* $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ *y* u_2 *aquélla para* $c_0 = 0$, $c_1 = 1$*:*

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1 - \frac{B_0}{2}x^2 - \frac{B_1 - A_0 B_0}{6}x^3 + \ldots\,, \\ u_2(x) &= x - \frac{A_0}{2}x^2 - \frac{A_1 + B_0 - A_0^2}{6}x^3 + \ldots \end{aligned}$$

□

Obviamente, las mismas consideraciones rigen si los coeficientes son analíticos en un entorno de un punto x_0, en cuyo caso $A(x)$, $B(x)$ y $u(x)$ pueden expresarse como series de potencias de $(x - x_0)$ en ese entorno.

Ejemplo III.2.1:

$$u'' - k^2 u = 0$$

La solución general es $u(x) = \alpha e^{kx} + \beta e^{-kx} = a_0 \cosh(kx) + a_1 \sinh(kx)$, con $a_{0,1} = \alpha \pm \beta$. Podemos obtenerla con el método anterior (para $A(x) = 0$, $B(x) = -k^2$), planteando la serie (III.2.3). Se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n [c_{n+2}(n+2)(n+1) - k^2 c_n] = 0\,,$$

de donde

$$c_{n+2} = \frac{k^2 c_n}{(n+2)(n+1)} = c_n \frac{k^{n+2} n!}{k^n (n+2)!}\,, n \geq 0\,. \tag{III.2.6}$$

Para $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, la relación recursiva se satisface si

$$c_n = \frac{k^n}{n!}, \quad n \text{ par}, \quad c_n = 0, \quad n \text{ impar},$$

que conduce a $u_1(x) = \cosh(kx)$, y si $c_1 = 1$, $c_0 = 0$,

$$c_n = \frac{k^n}{n!}, \quad n \text{ impar}, \quad c_n = 0, \quad n \text{ par}.$$

Esto permite obtener $u_2(x) = \sinh(kx)$. El teorema anterior implica la convergencia de estas series $\forall\, x \in \Re$.

III.2.2. Desarrollo alrededor de puntos singulares regulares

Analizaremos, ahora, el caso en que los coeficientes de la ecuación diferencial de segundo orden no son analíticos en el punto alrededor del cual se propone un desarrollo en serie para las soluciones pero satisfacen, en ese punto, condiciones menos restrictivas, que detallaremos en las hipótesis del teorema que sigue. Si esas condiciones se cumplen, se dice que el problema de Sturm-Liouville tiene, en dicho punto, un punto singular regular.

Teorema III.2.2 *(Teorema de Frobenius-Fuchs): Dada la ecuación diferencial* $u'' + A(x)u' + B(x)u = 0$*, si* $A(x)$ *posee, a lo sumo, un polo simple en* $x = 0$ *y* $B(x)$*, a lo sumo, un polo de orden 2 en* $x = 0$*, de modo que para* $0 < |x| < R$ *se cumple*

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=-1}^{\infty} A_n x^n = \frac{A_{-1}}{x} + A_0 + \ldots, \\ B(x) &= \sum_{n=-2}^{\infty} B_n x^n = \frac{B_{-2}}{x^2} + \frac{B_{-1}}{x} + \ldots, \end{aligned}$$

*entonces una de las soluciones linealmente independientes de la ecuación (*III*.2.1) tiene, para* $0 < |x| < R$*, la forma de una serie generalizada de potencias*

$$u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+s} = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{III.2.7}$$

donde $a_0 \neq 0$ *y* s *es una de las raíces de la ecuación indicial*

$$s(s-1) + A_{-1}s + B_{-2} = 0, \tag{III.2.8}$$

o sea,

$$s = \frac{1 - A_{-1} \pm r}{2}, \quad r = \sqrt{(1 - A_{-1})^2 - 4B_{-2}}. \tag{III.2.9}$$

Si la diferencia r entre las dos raíces de esta ecuación no es entera, entonces la segunda solución de (III.2.1) es también una serie generalizada de potencias, con s la otra raíz de (III.2.9). En cambio, si r es entero, la segunda solución tiene la forma

$$u_2(x) = Cu_1(x)\ln x + x^{s'}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\,, \tag{III.2.10}$$

donde C es una constante (que puede ser 0) y s' es la otra raíz de (III.2.9), con $\mathrm{Re}[s'] \leq \mathrm{Re}[s]$. Si $r = 0$ ($s = s'$), entonces $C \neq 0$.

La necesidad de una serie generalizada de potencias puede comprenderse analizando el comportamiento de la solución para $x \to 0$. Conservando sólo los términos de mayor orden en este límite, la ecuación (III.2.1) se reduce a

$$u'' + \frac{A_{-1}}{x}u' + \frac{B_{-2}}{x^2}u = 0\,, \tag{III.2.11}$$

que es una ecuación de Euler, con soluciones $u(x) = cx^s$ (y también $x^s \ln x$ para raíces multiples). Reemplazando esta solución en (III.2.11) obtenemos

$$cx^s[s(s-1) + A_{-1}s + B_{-2}] = 0$$

que conduce, precisamente, a la ecuación indicial (III.2.8). Si las dos raíces de (III.2.9) son distintas, las soluciones de (III.2.1) deben ser, pues, de la forma cx^s para x cercano al origen. Si las raíces son iguales, la segunda solución linealmente independiente de (III.2.11) es $x^s \ln x$, por lo que la segunda solución de (III.2.1) debe ser de esta forma para $x \to 0$.

La ecuación indicial surge, de todos modos, al reemplazar (III.2.7) en (III.2.1). Haciendo esto btenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{s+n-2}[a_n(n+s)(n+s-1) + \sum_{m=0}^{n} a_m(A_{n-m-1}(m+s) + B_{n-m-2})] = 0\,.$$

La anulación del coeficiente de x^{s-2} ($n = 0$) implica

$$a_0[s(s-1) + A_{-1}s + B_{-2}] = 0$$

que conduce a la ecuación indicial (III.2.8) al ser $a_0 \neq 0$. Luego, la anulación del coeficiente de x^{n+s-2} para $n \geq 1$ nos permite obtener la relación recursiva

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{\sum_{m=0}^{n-1} a_m(A_{n-m-1}(m+s) + B_{n-m-2})}{(n+s)(n+s-1) + A_{-1}(n+s) + B_{-2}} \\ &= -\frac{\sum_{m=0}^{n-1} a_m(A_{n-m-1}(m+s) + B_{n-m-2})}{n(n+2s+A_{-1}-1)}, \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

donde el segundo miembro depende de $a_0, \ldots, a_{n-1}$. Como $n + 2s + A_{-1} - 1 = n \pm r$, esto es válido si $n \pm r \neq 0$, o sea, $n - r \neq 0$. Los problemas con una solución del tipo (III.2.7) pueden surgir, entonces, sólo cuando r es entero y, en esas condiciones, para la raíz menor $s = \frac{1-A_{-1}-r}{2}$, en cuyo caso la segunda solución es de la forma (III.2.10).

□

Problema sugerido III.2.1: Muestre que el segundo término del miembro derecho en (III.2.10), $w(x) = u_2(x) - Cu_1(x)\ln(x)$, satisface la ecuación no homogénea

$$w'' + A(x)w' + B(x) = -C[2\frac{u_1'}{x} + u_1(\frac{A(x)}{x} - \frac{1}{x^2})] \qquad \text{(III.2.12)}$$

y que la misma puede resolverse mediante el desarrollo en serie de potencias indicado eligiendo C adecuadamente.

Ejemplo III.2.2: Consideraremos, en realidad, primero un contraejemplo:

$$u'' + u/x^4 = 0\,. \qquad \text{(III.2.13)}$$

Esta ecuación no es de la forma contemplada en el teorema III.2.2, pues $B(x)$ posee un polo de orden 4. Puede verificarse que la solución general de esta ecuación es

$$u(x) = x[c_1\cos(1/x) + c_2\sin(1/x)]\,,$$

que no es de la forma (III.2.7) o (III.2.10), ya que posee una *singularidad esencial* en $x = 0$.

Notemos, sin embargo, que la solución es de la forma (III.2.7) en $z = 1/x$ ($u(z) = (c_1\cos z + c_2\sin z)/z$). En esta variable, la ecuación (III.2.13) se convierte en $u'' + 2u'/z + u = 0$, que es de la forma contemplada en el teorema III.2.2, y la ecuación indicial es $s(s-1) + 2s = 0$, con raíces $s = -1$ y $s = 0$, en acuerdo con el desarrollo en serie de $u(z)$.

Veremos luego varios ejemplos muy importantes (Ecuación de Bessel, entre otros).

A continuación, utilizaremos también este teorema para determinar el comportamiento en los bordes en problemas de Sturm-Liouville singulares.

III.2.3. Propiedades de las soluciones de los problemas de Sturm-Liouville singulares

Los problemas de Sturm-Liouville para los cuales $p(x)$ se anula en uno o más puntos del intervalo (conocidos como singulares) tienen como soluciones las llamadas funciones especiales, de aparición muy usual en Física. Tales soluciones tienen particularidades que pueden resumirse como sigue:

Supongamos que

1. $p(x) > 0$ en (a, b),

2. $p(x) = (x - a)\varphi(x)$, con $\varphi(a) > 0$ y $\varphi(x)$ analítica en un entorno de a (de modo que $p(x)$ tiene un cero simple en $x = a$).

3. $q(x)$ tiene a lo sumo un polo simple en $x = a$, con residuo no negativo, de forma que $q(x) = \psi(x)/(x-a)$, con $\psi(a) \geq 0$ y $\psi(x)$ analítica en un entorno de a.

En esas condiciones, valen los tres lemas siguientes:

Lema III.2.3 *Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación*

$$L[y] = -\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)\,y = 0\,, \tag{III.2.14}$$

Si $y_1(x)$ tiene límite finito para $x \to a$, entonces $y_2(x)$ es divergente en ese mismo punto.

Demostración

Por la primera hipótesis, para $x \in (a,b)$ la ecuación (III.2.14) equivale a

$$y'' + \frac{p'(x)}{p(x)}y' - \frac{q(x)}{p(x)}y = 0\,. \tag{III.2.15}$$

Si $p(x)$ tiene un cero simple en $x = a$, para $x \to a$ tenemos $p(x) = (x-a)\phi(a) + O(x-a)^2$ y $p'(x) = \varphi(x) + (x-a)\varphi'(x) = \phi(a) + O(x-a)$.
Entonces $p'(x)/p(x) = \frac{1}{x-a} + O(x-a)$ para $x \to a$, por lo que el segundo término en (III.2.15) tiene un polo simple en $x = a$, con residuo 1.
Por otro lado, el tercer término tendrá a lo sumo un polo de orden 2 en $x = a$, ya que $\frac{q(x)}{p(x)} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)(x-a)^2} = \frac{r}{(x-a)^2} + O(\frac{1}{(x-a)})$ para $x \to a$, con $r = \psi(a)/\varphi(a) \geq 0$.

Entonces, alrededor de $x = a$ podemos considerar el desarrollo en serie de potencias generalizadas para las soluciones de (III.2.14). El comportamiento de éstas para $x \to a$ estará entonces completamente determinado por las raíces de la ecuación indicial, que será

$$s(s-1) + 1 - r = 0\,. \tag{III.2.16}$$

Por lo tanto,

$$s = \pm\sqrt{r}, \quad r \geq 0\,. \tag{III.2.17}$$

Para $x \to a$, las soluciones correspondientes serán, entonces, de la forma

$$y_1(x) = (x-a)^{\sqrt{r}}(1 + O(x-a)), \quad y_2(x) = (x-a)^{-\sqrt{r}}(1 + O(x-a)) \tag{III.2.18}$$

si $r > 0$, e

$$y_1(x) = 1 + O(x-a), \quad y_2(x) = \ln(x-a)(1 + O(x-a)) \tag{III.2.19}$$

si $r = 0$ (Si $2\sqrt{r}$ es entero, $y_2(x)$ puede contener además un término proporcional a $y_1(x)\ln(x-a)$, que no afecta el término dominante para $x \to a$).

Vemos entonces que, si $r > 0$, $y_1(x)$ se anula como $(x-a)^{\sqrt{r}}$ para $x \to a$, mientras que $y_2(x)$ diverge como $(x-a)^{-\sqrt{r}}$. En cambio, si $r = 0$, $y_1(x)$ tiende a una constante no nula para $x \to a$, mientras que $y_2(x)$ tiene una divergencia logarítmica. En todos los casos, pues, $y_1(x)$ permanece acotada para $x \to a$, mientras que $y_2(x)$ diverge en este límite.

□

Esta demostración implica, además, el siguiente lema:

Lema III.2.4 *En las condiciones del lema anterior, si $y_1(a) \neq 0$, $y_2(x)$ tiene una singularidad logarítmica en $x = a$, mientras que si $y_1(x)$ tiene un cero de orden n en $x = a$, $y_2(x)$ tiene un polo del mismo orden en ese punto.*

Demostración

Es consecuencia inmediata de (III.2.18)–(III.2.19).

□

Vemos, también, la **necesidad de que r sea no negativo** ($\psi(a) \geq 0$) para la validez de ambos lemas.

Si $r < 0$, $s = \pm\sqrt{r} = \pm i\sqrt{|r|}$ es imaginario. En este caso, las soluciones se comportan para $x \to a$ como $(x-a)^{i\sqrt{|r|}}$ y $(x-a)^{-i\sqrt{|r|}}$, es decir, como $\cos[\sqrt{|r|}\ln(x-a)]$ y $\sin[\sqrt{|r|}\ln(x-a)]$ (recordar que $x^{i\alpha} = e^{i\alpha \ln x} = \cos(\alpha \ln x) + i\sin(\alpha \ln x)$).

Por lo tanto, en este caso, *ambas* soluciones permanecen finitas! para $x \to a$ si x es real, aunque, por cierto, no son analíticas en $x = a$. Para $x \to a$, estas funciones oscilan rápidamente y sus derivadas *divergen*, como es fácil verificar.

Los dos lemas anteriores muestran que, si se tiene un problema de Sturm-Liouville que se anula en algún o algunos puntos del intervalo considerado ($p(a) = 0$), el problema a resolver será, por ejemplo, $Ly(x) = 0$ en (a, b), cuya solución general es $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$. Si se requiere que la solución tenga sentido físico, en las condiciones del lema deberán imponerse dos condiciones:

1. Condición de acotación en el punto en que se anula $p(x)$, i.e., $|y(a)| < \infty$
2. Condición de contorno de tipo Robin en $x = b$. Si $p(a) = p(b) = 0$, se impone, en ambos extremos, la condición de acotación (como veremos, este es el caso para la ecuación de Legendre).

Un tercer lema es el siguiente:

Lema III.2.5 *En las condiciones de los lemas anteriores, la solución acotada en $x = a$ satisface*

$$\lim_{x \to a} p(x)\frac{d}{dx}y_1(x) = 0\,.$$

En efecto, para $x \to a$, $p(x)y_1'(x)$ se comporta como

$$p(x)y_1'(x) = (x-a)(x-a)^{\sqrt{r}-1}(\sqrt{r} + O(x-a)) = (x-a)^{\sqrt{r}}(\sqrt{r} + O(x-a))\,,$$

que tiende a 0 para $x \to a$, tanto para $r > 0$ como para $r = 0$.

□

Por otro lado, si $r < 0$ no se cumple que $p(x)y'(x) \to 0$ para $x \to a$, como es fácil verificar.

Los tres lemas anteriores permiten demostrar el siguiente teorema

Teorema III.2.6 *El operador de Sturm-Liouville, con su dominio definido por la condición de acotación en el punto donde se anula $p(x)$, resulta autoadjunto.*

Demostración

Sea $p(x)$ tal que $p(a) \geq 0$. Como en el caso en que p permanece no nulo en todo el intervalo, los términos de borde restantes luego de integrar por partes son:

$$(u, Lv) - (Lu, v) = -u(x)p(x)\frac{dv}{dx}|_a^b + v(x)p(x)\frac{du}{dx}|_a^b .$$

Las contribuciones de borde en $x = b$ se anulan del modo usual, debido a las condiciones de contorno de Robin homogéneas. Las contribuciones en $x = a$ se anulan como consecuencia del último lema. Eso demuestra el carácter autoadjunto.

□

Para terminar, señalamos que, en estas condiciones, las propiedades espectrales que hemos enunciado para el problema de Sturm-Liouville no singular (ver III.1.5)) siguen siendo válidas.

III.2.4. Motivación del estudio de funciones especiales: problema de autovalores para el operador laplaciano en una bola tridimensional

En muchos problemas de interés físico es necesario encontrar la solución de la ecuación

$$-\Delta u = \lambda u \,,$$

donde Δ es el operador de Laplace, en una región con simetría esférica. Esta ecuación, escrita en coordenadas esféricas se reduce a

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \lambda u = 0\,, \qquad \text{(III.2.20)}$$

con $0 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ y $0 \leq \theta \leq \pi$.[2]

[2] La región en que hemos definido nuestro problema se denomina la bola tridimensional (B^3) de radio r_0. Su borde es la esfera bidimensional del mismo radio. Por abuso de lenguaje, suele llamarse a nuestra región de interés la esfera sólida de radio r_0 y a su borde, la superficie esférica de igual radio.

La ecuación anterior puede resolverse utilizando el llamado método de separación de variables. Dicho método consiste en proponer, para la solución, una dependencia de la forma $u(r,\theta,\varphi) = R(r)Y(\theta,\varphi)$. La validez de este método será probada en la sección V.6. Hasta entonces, lo aplicaremos dando por cierta su validez. Reemplazando este "Ansatz" en (III.2.20), se tiene

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + \lambda r^2 R(r) = -\frac{1}{Y(\theta,\varphi)}\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi)\,, \qquad \text{(III.2.21)}$$

donde

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,. \qquad \text{(III.2.22)}$$

En la ecuación (III.2.21), el miembro izquierdo sólo depende de la variable r, mientras el miembro derecho sólo depende de las variables angulares. Para que la igualdad sea válida para todos los valores de las variables es, entonces, necesario que ambos miembros sean constantes. Llamaremos a esa constante $\alpha(\alpha+1)$.

III.2.5. Ecuación de Legendre

Empecemos por analizar la ecuación resultante para la parte angular, es decir,

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y(\theta,\varphi) + \alpha(\alpha+1)Y(\theta,\varphi) = 0\,. \qquad \text{(III.2.23)}$$

Supongamos, en primer lugar, que el problema a tratar tiene simetría azimutal, es decir, $Y(\theta,\varphi) = Y(\theta)$, independiente de φ. En ese caso, la ecuación (III.2.23) se reduce a

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta)}{\partial\theta}\right) + \alpha(\alpha+1)Y(\theta) = 0\,,$$

con $0 \leq \theta \leq \pi$.

El cambio de variable $x = \cos\theta$ $\left(\frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial x}\right)$ nos conduce, llamando $Y(\theta) = u(x)$, a la ecuación

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + \alpha(\alpha+1)u = 0, \quad \text{c}on \quad -1 \leq x \leq 1\,. \qquad \text{(III.2.24)}$$

Esta última ecuación puede escribirse, también, en la forma de Sturm-Liouville

$$[(1-x^2)u']' + \alpha(\alpha+1)u = 0\,. \qquad \text{(III.2.25)}$$

Nótese que, en este caso, $p(x)$ se anula en ambos extremos del intervalo de variación de la variable x y, de acuerdo con lo estudiado anteriormente, debemos imponer la condición de acotación de las soluciones en ambos ($x = \pm 1$).

La ecuación de Sturm-Liouville a considerar corresponde a $A(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$, $B(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}$, ambos analíticos para $|x| < 1$.

Como $\alpha(\alpha+1) = (\alpha+1/2)^2 - 1/4$, es suficiente considerar $\text{Re}[\alpha] \geq -1/2$. Proponiendo para la solución un desarrollo en serie como el de la ecuación (III.2.3) se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \{c_{n+2}(n+2)(n+1) - c_n[n(n-1) + 2n - \alpha(\alpha+1)]\} = 0\,,$$

de donde

$$c_{n+2} \;=\; c_n \frac{n(n+1) - \alpha(\alpha+1)}{(n+2)(n+1)} = -c_n \frac{(n+\alpha+1)(\alpha-n)}{(n+2)(n+1)}\,.$$

Para $c_1 = 0$ y $c_0 \neq 0$, se obtiene la solución *par*, para la cual $c_{2n+1} = 0$ y

$$c_2 = -c_0 \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!},\; c_4 = c_0 \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}, \ldots$$

mientras que para $c_0 = 0$ y $c_1 \neq 0$, se obtiene la solución *impar*, en la cual $c_{2n} = 0$ y

$$c_3 = -c_0 \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!},\; c_5 = c_0 \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}, \ldots$$

Dado que $|c_{n+2}/c_n| \to 1$ para $n \to \infty$, el radio de convergencia de la serie resultante es 1. Puede verse que la solución no es, en general, acotada para $x \in (-1, 1)$ ($|u(x)| \to \infty$ en al menos uno de los bordes). Pero, como ya hemos visto, buscamos soluciones acotadas en ambos extremos. Y eso sólo ocurre si $\alpha = l$, con l entero positivo, en cuyo caso $c_{l+2} = 0$. Esto implica que la solución con la *misma paridad* de l se convierte en un *polinomio de grado* l, que se denomina *Polinomio de Legendre*. En tal caso, los coeficientes no nulos del polinomio están dados por

$$c_{2n+i} = c_i \frac{(-1)^n (l_2!)^2 (l+2n)!}{l!(l_2-n)!(l_2+n)!(2n+i)!}\,,\; i = 0, 1,\; n = 0, \ldots, l_2,$$

donde $l_2 = [l/2]$ ([ ] denota parte entera) e $i = 0$ corresponde a la solución par para l par, $i = 1$ a la solución impar para l impar. Los polinomios de Legendre se definen exactamente como la solución para los coeficientes iniciales $c_i = (-1)^{l_2} l!/[(l_2!)^2 2^{l-i}]$, $i = 0, 1$, y pueden por lo tanto escribirse como (llamando $k = l_2 - n$)

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l} \sum_{k=0}^{l_2} \frac{(-1)^k (2l-2k)!}{k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}.$$

Dado que $\frac{(2l-2k)!}{(l-2k)!} x^{l-2k} = \frac{d^l}{dx^l} x^{2l-2k}$, y $k!(l-k)! = l!/\binom{l}{k}$, pueden reescribirse como

$$P_l(x) \;=\; \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \binom{l}{k} x^{2l-2k} = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \qquad \text{(III.2.26)}$$

(Fórmula de Rodrigues). Algunos ejemplos son

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_1(x) &= x \quad P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3-3x). \end{aligned} \tag{III.2.27}$$

Los Polinomios de Legendre satisfacen las relaciones

$$P_l(1)=1,\ \ \int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \delta_{ll'}\frac{2}{2l+1},$$

$$lP_l(x) = (2l-1)xP_{l-1}(x) - (l-1)P_{l-2}(x),\ \ l \geq 2.$$

Cabe destacar, entonces, que soluciones *acotadas* de la ecuación (III.2.24) para $x \in (-1,1)$ y $\alpha \geq -1/2$ se obtienen únicamente cuando $\alpha = l$, entero, y, en ese caso, para la solución con la misma paridad de l, la cual es un polinomio proporcional al Polinomio de Legendre (III.2.26). Por ejemplo, puede verificar el lector que, para $\alpha = 0$, un par de soluciones linealmente independientes de (III.2.24) está dado por $P_0(x) = 1$ y $Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$, siendo $Q_0(x)$ la solución impar, que diverge para $x \to \pm 1$, tal como se demostró en el lema III.2.4.

Tanto los polinomios de Legendre $P_l(x)$ como el par de soluciones linealmente independientes $\{P_\alpha(x), Q_\alpha(x)\}$ de (III.2.24) para α general (denominadas funciones de Legendre de primera y segunda especie) están directamente incorporados en la mayoría de los programas de cómputo analítico (por ejemplo [11]). Sus propiedades pueden encontrarse, también, en [14], [15] y [16].

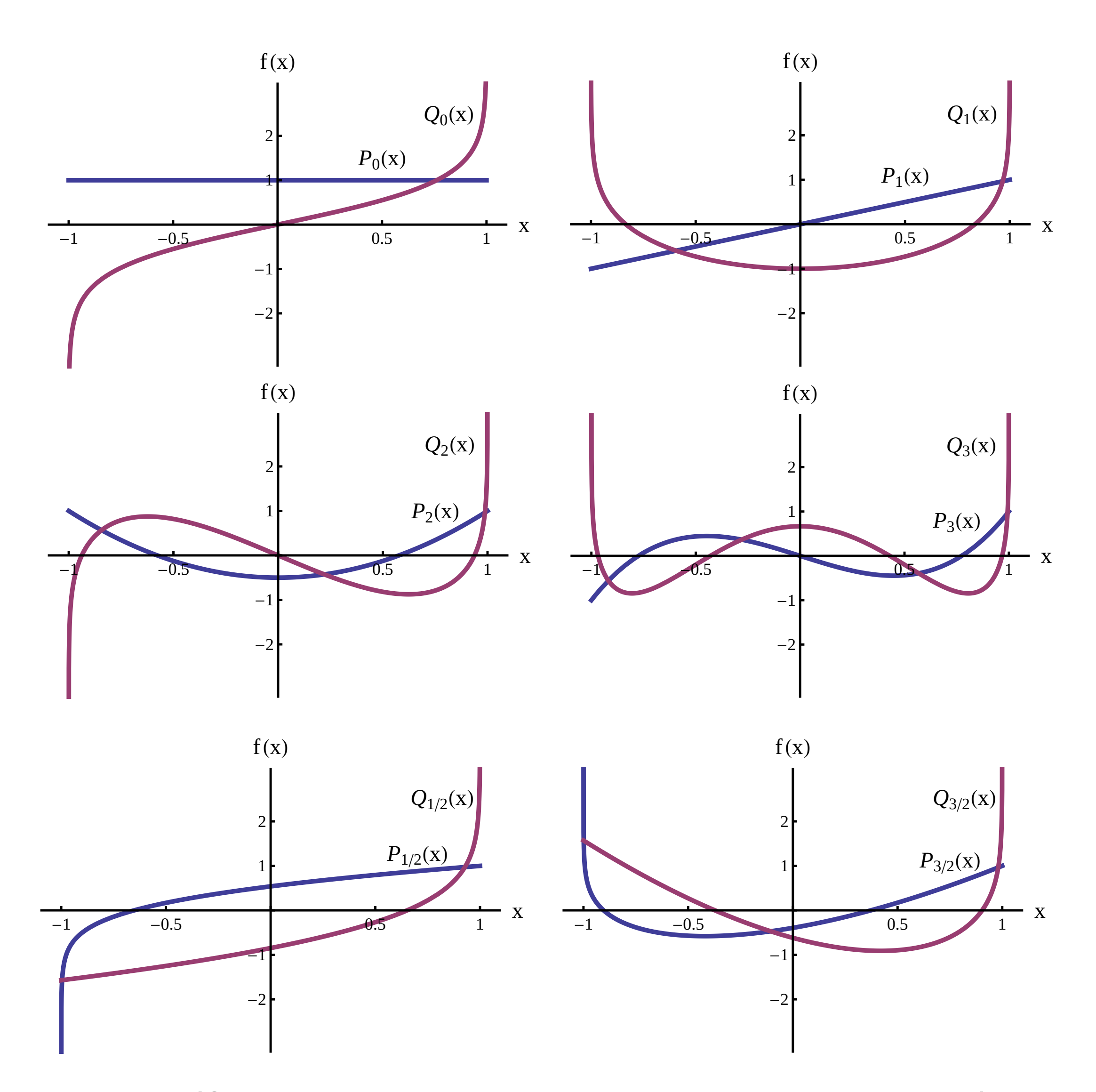


Figura 17: Gráficas de las soluciones linealmente independientes de la ecuación de Legendre $P_\alpha(x)$ y $Q_\alpha(x)$, para $\alpha =$ 0, 1, 2, 3, 1/2 y 3/2, y $x \in (-1, 1)$.

III.2.6. Ecuación asociada de Legendre y armónicos esféricos

Volvamos, ahora, al caso más general para la dependencia angular del problema con simetría esférica (ecuación (III.2.23)), en que sí existe dependencia en el ángulo azimutal φ, con la condición de acotación en la variable θ y, además, $Y(\theta, \varphi = 0) = Y(\theta, \varphi = 2\pi)$ y $\partial_\varphi Y(\theta, \varphi = 0) = \partial_\varphi Y(\theta, \varphi = 2\pi)$. Esta última condición (periodicidad en φ) garantiza que las soluciones sean univaluadas. Explícitamente, tendremos

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} + \alpha(\alpha+1)Y(\theta,\varphi) = 0\,. \quad \text{(III.2.28)}$$

Una vez más, podemos proponer una solución en variables separadas, es decir, $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$. De reemplazar este "Ansatz" en la ecuación anterior resulta

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + \frac{\Theta(\theta)}{\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \alpha(\alpha+1)\Theta(\theta)\Phi(\varphi) = 0$$

o, equivalentemente,

$$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + \alpha(\alpha+1)\sin^2\theta = -\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2}\,.$$

Como ya comentamos, esta igualdad sólo puede satisfacerse para todos los valores de θ y φ si ambos miembros son iguales a una constante, que llamaremos γ.

La ecuación que involucra la variable azimutal será, entonces,

$$-\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} - \gamma\Phi(\varphi) = 0\,,$$

cuya solución general es de la forma

$$\Phi(\varphi) = A\sin\sqrt{\gamma}\varphi + B\cos\sqrt{\gamma}\varphi\,.$$

La condición de periodicidad exige que $\sqrt{\gamma} = m,\ m \in \mathbb{Z}^+ + \{0\}$, por lo que $\gamma = m^2$.

Volviendo ahora a la ecuación diferencial en la variable θ tendremos

$$\frac{\sin\theta}{\Theta(\theta)}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}\right) + \alpha(\alpha+1)\sin^2\theta - m^2 = 0\,.$$

El mismo cambio de variable que utilizamos en el caso con simetría azimutal conduce, en el caso presente, a la ecuación

$$(1-x^2)u'' - 2xu' + \left[\alpha(\alpha+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]u = 0\,, \quad \text{(III.2.29)}$$

llamada ecuación asociada de Legendre. Esta ecuación puede, también, escribirse

$$[(1-x^2)u']' + \left[\alpha(\alpha+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]u = 0\,,$$

que se reduce a la ecuación de Legendre (III.2.25) para $m = 0$.

Sin perder generalidad podemos tomar $\mathrm{Re}[\alpha] \geq -1/2$. Es conveniente realizar el cambio de variable $u = (1-x^2)^{m/2}w$. Se obtiene entonces la ecuación

$$(1-x^2)w'' - 2(m+1)xw' + [\alpha(\alpha+1) - m(m+1)]w = 0\,. \quad \text{(III.2.30)}$$

Proponiendo una serie de potencias para w, se obtiene

$$\begin{aligned} c_{n+2} &= c_n \frac{n(n-1)+(2n+m)(m+1)-\alpha(\alpha+1)}{(n+2)(n+1)} \\ &= -c_n \frac{(n+\alpha+1+m)(\alpha-m-n)}{(n+2)(n+1)}\,. \end{aligned} \quad \text{(III.2.31)}$$

Si $\alpha - m = k$, con k entero positivo, $c_{k+2} = 0$ y la solución con la misma paridad de k es un polinomio de grado k. Estas son las únicas soluciones acotadas de (III.2.30) en $(-1, 1)$. En el caso usual, m es entero, y soluciones acotadas de (III.2.30) existirán entonces sólo para $\alpha = l \geq m$, con l entero positivo. La solución con la misma paridad de $l - m$ será entonces un polinomio de grado $l - m$.

Si bien podemos obtener dichos polinomios por medio de (III.2.31), es fácil ver que si $u(x)$ es solución de la ecuación de Legendre (III.2.24), entonces su derivada emésima $u^{(m)}(x)$ satisface la ecuación (III.2.30):

$$(1-x^2)u^{(m+2)} - 2(m+1)xu^{(m+1)} + [\alpha(\alpha+1) - m(m+1)]u^{(m)} = 0.$$

Por lo tanto, para m entero positivo, las soluciones de (III.2.29) son de la forma $(1 - x^2)^{m/2}u^{(m)}(x)$, con $u(x)$ solución de (III.2.24). Para α y m entero, con $\alpha = l \geq m$, obtenemos así las denominadas *funciones asociadas de Legendre*, definidas por

$$P_l^m(x) = (-1)^m(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_l(x), \quad 0 \leq m \leq l\,,$$

que son polinomios (de grado l) sólo para m entero y que constituyen las únicas soluciones acotadas de (III.2.29) en $(-1, 1)$. Se define también

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!}P_l^m(x)\,,$$

verificándose

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_{l'}^m(x)dx = \delta_{ll'}\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}, \quad \int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_{l'}^{-m}(x)dx = \delta_{ll'}(-1)^m\frac{2}{2l+1}\,.$$

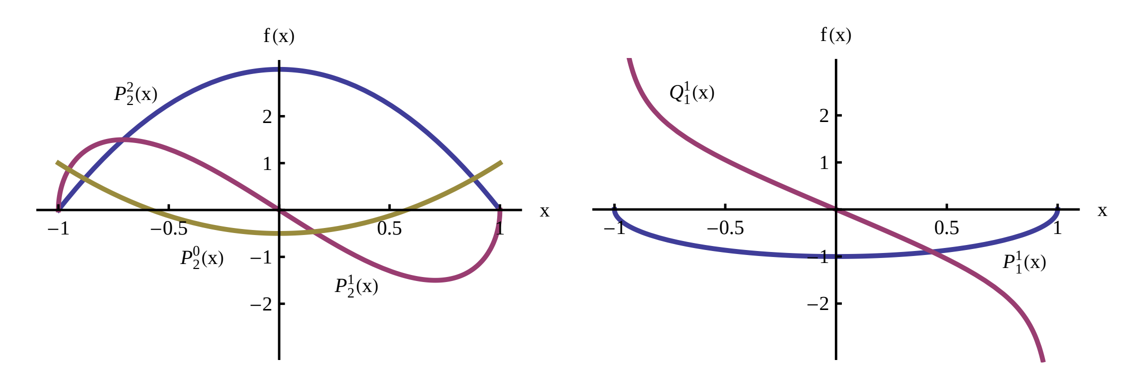


Figura 18: Izquierda: Gráficas de las funciones asociadas de Legendre $P_2^2(x) = 3(1-x^2)$, $P_2^1(x) = -3x\sqrt{1-x^2}$, $P_2^0(x) = (3x^2-1)/2$. Derecha: Las dos soluciones linealmente independientes de (III.2.29) para $m = l = 1$, $P_1^1(x) = -\sqrt{1-x^2}$, $Q_1^1(x) = \sqrt{1-x^2}[\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x} - \frac{x}{1-x^2}]$.

Notemos que las soluciones de la ecuación angular (III.2.28), para un dado valor de l, tienen la forma $P_l^m(\cos\theta)\cos m\varphi$ o $P_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi$. Es convención usual permitir valores negativos de m, asignando valores negativos de m a las autofunciones que contienen la función $\cos m\varphi$ y valores de m positivos a las que contienen $\sin m\varphi$. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned} Y_l^0(\theta,\varphi) &= P_l^0(\cos\theta) = P_l(\cos\theta) \\ Y_l^{-k}(\theta,\varphi) &= P_l^k(\cos\theta)\cos k\varphi \\ Y_l^k(\theta,\varphi) &= P_l^k(\cos\theta)\sin k\varphi \end{aligned}$$

para $k = 1, 2, ..., l$.

Se conoce a estas funciones como armónicos esféricos. La solución general, para l dado, está dada por

$$Y_l = \sum_{m=-l}^{l} C_{l,m} Y_l^m(\theta,\varphi)\,.$$

Es interesante estudiar el comportamiento de los armónicos esféricos sobre la esfera S^2, borde de la bola tridimensional. Para eso, demostraremos el siguiente

Teorema III.2.7 *(Ceros de los polinomios de Legendre y de sus derivadas):$P_l(x)$ tiene l ceros en $(-1,1)$ y $\frac{d^m P_l}{dx^m}$, con $m \leq l$ tiene $l-m$ ceros en el mismo intervalo abierto. Además, esta última no se anula en los extremos del intervalo.*

Demostración

Recordemos que, según la fórmula de Rodrigues, $P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}\omega(x)$. Para $l = 0$ el resultado es evidente. Consideremos, entonces, $\omega(x) = (x^2-1)^l$ con $l \geq 1$. ω se anula en los extremos. Por el teorema sobre el cero de la derivada, su derivada tiene al menos un cero en el intervalo abierto. Además, esta última también se anula en los extremos si $l \geq 1$. En este último caso, la derivada segunda de ω tiene, al menos, dos ceros en el abierto y, si $l \geq 2$, se anula en los extremos. Continuando este razonamiento,

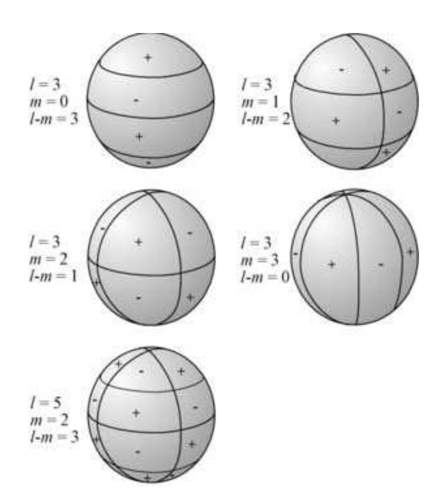


Figura 19: Signos de los armónicos esféricos.

se concluye que si la derivada l-ésima de ω tiene al menos l ceros en $(-1,1)$, y dado que, además, se trata de un polinomio de grado l, debe tener exactamente l ceros. Esto demuestra que P_l tiene l ceros en $(-1,1)$.

Para demostrar la segunda parte del teorema, observemos que $P_l(x)$ no se anula en ninguno de los extremos del intervalo. Por el teorema sobre el cero de la derivada, su derivada tiene, al menos, $l-1$ ceros (ya que entre dos ceros del polinomio hay, al menos, uno de su derivada. Pero, dado que se trata de un polinomio de grado $l-1$, tiene exactamente $l-1$ ceros en el abierto. Además, no se anula en los extremos. Continuando este razonamiento concluimos que $\frac{d^m P_l}{dx^m}$, $m \leq l$ tiene $l-m$ ceros en $(-1,1)$.

□

Demostrado este teorema, podemos establecer en qué regiones de S^2 se anula $Y_l^{\mp m}(\theta,\phi) = \sin^m\theta \, \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}\rfloor_{x=\cos\theta} \begin{matrix}\cos m\varphi \\ \sin m\varphi\end{matrix}$. En primer lugar, $\sin\theta$ se anula en los polos; por su parte, $\cos m\varphi$ (o $\sin m\varphi$) se anulan en $m\varphi = (k+\frac{1}{2})\pi$ (o $k\pi$) con $k \leq 2m$, es decir, en $2m$ meridianos. Finalmente, como acabamos de ver, $\frac{d^m P_l}{dx^m}$ se anula en $l-m$ paralelos. La esfera queda, así, dividida en parcelas. En cada una de esas parcelas, $Y_l^m(\theta,\phi)$ tiene signo constante y cambia de signo al pasar a una parcela adyacente, como muestra la Figura 19.

III.2.7. Ecuación de Bessel, funciones de Bessel y función Gamma

Volviendo a nuestro ejemplo del cálculo de autovalores para el operador laplaciano en la bola tridimensional, recordamos que nos queda por resolver la ecuación (III.2.21) en lo que concierne a la función que contiene la dependencia radial. Dicha ecuación está dada por

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right) + \left(\lambda r^2 - \alpha(\alpha+1)\right)R(r) = 0\,.$$

Definiendo $\nu \equiv \alpha(\alpha+1)+\frac{1}{4}$, $x=\sqrt{\lambda}r$ y $u=\sqrt{r}R$, la ecuación anterior puede llevarse a la forma

$$u''+\frac{u'}{x}+(1-\frac{\nu^2}{x^2})u=0\,. \tag{III.2.32}$$

Esta es la *ecuación de Bessel de orden* ν, que estudiaremos a continuación. Notar que la solución a nuestro problema estará dada por $R(r)=r^{-\frac{1}{2}}u(\sqrt{\lambda}r)$, que se conoce como función de Bessel esférica. Además del problema que usamos para motivar su estudio, la ecuación de Bessel surge naturalmente al resolver problemas con simetría cilíndrica, de allí la importancia de estudiar sus soluciones.

La ecuación (III.2.32) es de la forma contemplada en el teorema III.2.2. Aplicando dicho resultado obtenemos, definiendo $a_{-2}=a_{-1}=0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{s+n-2}[a_n[(n+s)(n+s-1)+(n+s)-\nu^2]+a_{n-2}]=0\,.$$

Para $n=0$, se obtiene $a_0[s(s-1)+s-\nu^2]=0$, que conduce a la ecuación indicial $s^2-\nu^2=0$, es decir,

$$s=\pm\nu\,.$$

Se obtiene, entonces, $a_1=0$. Para $n\geq 2$,

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{(n+s)^2-\nu^2}=-\frac{a_{n-2}}{n(n+2s)}\,.$$

Si $s=\nu$, con $Re(\nu)\geq 0$, esto implica

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-2}}=-\frac{1}{4n(n+\nu)}=\frac{(-1)^{n+1}2^{2n}(n-1)!\,\Gamma(n+\nu)}{(-1)^n 2^{2n+2}n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\,.$$

Hemos utilizado aquí la función **Gamma** definida, para $x>0$, por

$$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt\,.$$

Esta función satisface, para $x>1$, la relación

$$\Gamma(x)=(x-1)\Gamma(x-1)$$

(esto puede verse integrando por partes). Además, $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. Se obtiene entonces, para x natural o semientero positivo,

$$\Gamma(n)=(n-1)!,\quad \Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{n!2^{2n}}\,.$$

Para $x\to+\infty$,

$$\Gamma(x+1)=\sqrt{2\pi}e^{-x}x^{x+1/2}[1+O(x^{-1})]\,, \tag{III.2.33}$$

lo cual determina el comportamiento de $n!$ para n grande. La definición anterior es también válida para $x=z$ complejo si $\mathrm{Re}[z]>0$. Para z complejo arbitrario, $\Gamma(z)$ se define por continuación analítica, siendo analítica en todo el plano complejo, excepto en los enteros negativos o en $z=0$, donde posee polos simples ($\lim_{z\to -n}(z+n)\Gamma(z)=(-1)^n/n!$). Se verifica, además, que $\Gamma(-\nu)\Gamma(\nu+1)\sin(\nu\pi)=-\pi$.

La relación de recurrencia se satisface, entonces, si

$$a_{2n} = c\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!\Gamma(n+\nu+1)}.$$

Para $c = 2^{-\nu}$ se obtiene así la función de Bessel

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}(\frac{x}{2})^{\nu+2n},$$

llamada también función de Bessel de primera especie, que es una de las soluciones de (III.2.32). Aplicando el criterio del cociente puede verse fácilmente que la serie converge $\forall\ x \in \Re$ o $x \in C$. Si ν no es entero, la otra solución linealmente independiente de (III.2.32) es

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-\nu+1)}(\frac{x}{2})^{-\nu+2n}.$$

Si $\nu > 0$ es entero, la relación de recurrencia para $s = -\nu$ no puede prolongarse para $n \geq \nu$, y el procedimiento anterior no es válido para obtener la segunda solución linealmente independiente (para $n \geq 0$ entero, $J_{-n}(x) \equiv \lim_{\nu\to -n} J_\nu(x) = (-1)^n J_n(x)$). Se utiliza entonces, como segunda solución, la función

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}\,,$$

denominada función de Bessel de segunda especie o función de Neumann o Weber. La ventaja es que el límite de $Y_\nu(x)$ para $\nu \to n$, con $n > 0$ entero, proporciona la otra solución linealmente independiente de (III.2.32), que es de la forma $J_\nu(x)\ln(x) + x^{-\nu}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. La forma explícita de $Y_\nu(x)$, así como otras propiedades y funciones asociadas, se presentan en la página siguiente.

Para ν *semientero*, $J_\nu(x)$ e $Y_\nu(x)$ pueden expresarse en términos de senos y cosenos. Por ejemplo, es fácil ver que $J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}}\frac{\sin x}{x}$, $Y_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\frac{\cos x}{x}$. En general,

$$\begin{aligned} J_{n+1/2}(x) &= \sqrt{\tfrac{2x}{\pi}}x^n(-\tfrac{1}{x}\tfrac{d}{dx})^n(\tfrac{\sin x}{x}), \\ Y_{n+1/2}(x) &= -\sqrt{\tfrac{2x}{\pi}}x^n(-\tfrac{1}{x}\tfrac{d}{dx})^n(\tfrac{\cos x}{x}). \end{aligned}$$

Cabe destacar finalmente que, si $k \neq 0$, la solución general de la ecuación

$$u'' + \frac{u'}{x} + (k^2 - \frac{\nu^2}{x^2})u = 0. \qquad \text{(III.2.34)}$$

es

$$u(x) = AJ_\nu(kx) + BY_\nu(kx) \qquad \text{(III.2.35)}$$

El número k puede ser real o complejo. Para $k = i$, las funciones $J_\nu(ix)$, $Y_\nu(ix)$ son combinaciones lineales de las denominadas funciones de Bessel modificadas $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ (véase pág. siguiente y [14], [15], [16]).

Funciones de Bessel: Resumen

$$
\begin{aligned}
J_\nu(z) &= (\frac{z}{2})^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n+\nu+1)}(\frac{z^2}{4})^n \\
Y_\nu(z) &= \frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \quad (\nu \notin Z) \\
Y_\nu(z) &= \frac{2}{\pi}[J_\nu(z)\ln\frac{z}{2} - (\frac{z}{2})^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n[\phi(n)+\phi(n+\nu)]}{2n!(n+\nu)!}(\frac{z^2}{4})^n \\
&\quad -(\frac{z}{2})^{-\nu} \sum_{n=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-n-1)!}{2n!}(\frac{z^2}{4})^{2n}] , \quad \nu \in Z ,
\end{aligned}
$$

con $\phi(m) = \frac{\Gamma'(m+1)}{\Gamma(m)}$ ($\Gamma(x)$ denota la función Gamma) y la última suma presente sólo para $\nu \neq 0$.

Las funciones $J_\nu(kx)$ e $Y_\nu(kx)$ son soluciones de la ec. diferencial

$$u'' + \frac{u'}{x} + (k^2 - \frac{\nu^2}{x^2})u = 0 .$$

Fórmulas asintóticas para $|z| \gg 1$:

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos[z - (\nu + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}], \qquad Y_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin[z - (\nu + \frac{1}{2})\frac{\pi}{2}] .$$

Funciones de Hankel (o funciones de Bessel de 3^a especie):

$$H_\nu^{1,2}(z) = J_\nu(z) \pm iY_\nu(z) .$$

Para $|z| \gg 1$,

$$H_\nu(z)^{1,2} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\pm i[z-(\nu+\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}]}.$$

Funciones de Bessel modificadas:

$$I_\nu(z) = i^{-\nu}J_\nu(iz), \quad K_\nu(z) = i^{\nu+1}\frac{\pi}{2}[J_\nu(iz) + iY_\nu(iz)] .$$

$I_\nu(kz)$ y $K_\nu(kz)$ son soluciones de la ec. diferencial

$$u'' + \frac{u'}{x} - (k^2 + \frac{\nu^2}{x^2})u = 0 .$$

Para $|z| \gg 1$,

$$I_\nu(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \qquad K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} .$$

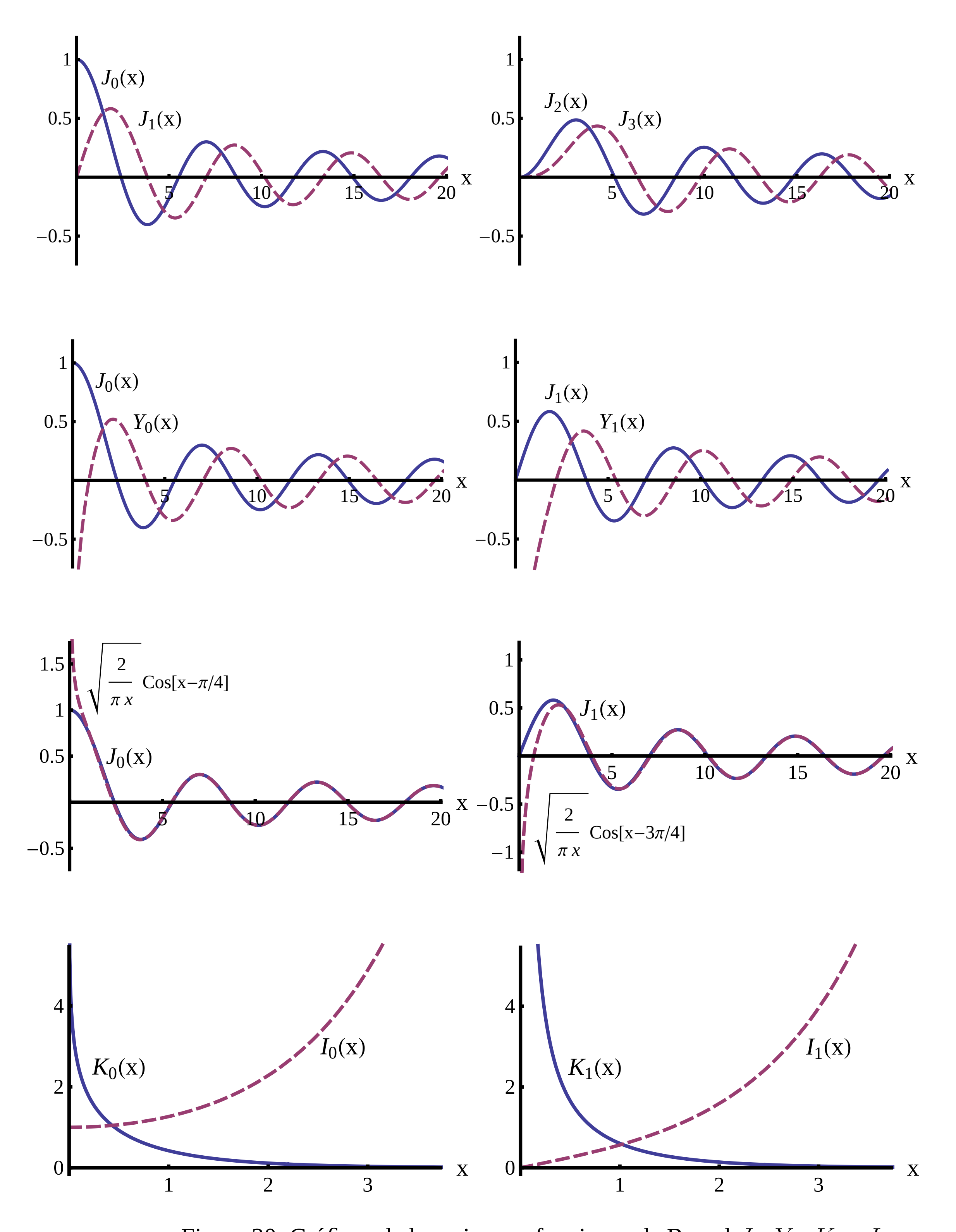


Figura 20: Gráficos de las primeras funciones de Bessel J_n, Y_n, K_n e I_n.

III.2.8. Otras funciones especiales de utilidad en Física

Función Hipergeométrica confluente

Consideremos la ecuación

$$xu'' + (b - x)u' - au = 0, \tag{III.2.36}$$

que surge en muchos problemas de Mecánica Cuántica al resolver la ecuación de Schrödinger unidimensional. Las raíces de la ecuación indicial $s(s-1) + bs = 0$ son $s = 0$ y $s = 1 - b$. Por lo tanto, si b no es 0 o entero negativo, una de las soluciones es una serie de potencias $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, con

$$c_{n+1} = c_n \frac{n+a}{(n+1)(n+b)}$$

y $c_0 \neq 0$. Para $c_0 = 1$ se obtiene así la solución

$$\begin{aligned} u_1(x) = F[a,b,x] &\equiv 1 + \frac{a}{b}x + \frac{a(a+1)}{2!\,b(b+1)}x^2 + \ldots \\ &= \frac{\Gamma[b]}{\Gamma[a]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma[n+a]}{n!\,\Gamma[n+b]} x^n, \end{aligned} \tag{III.2.37}$$

que se denomina *función hipergeométrica confluente*. Converge $\forall\, x$ (como resulta claro a partir de (III.2.36)). Para $a = -n$, con n entero positivo, se reduce a un *polinomio* de grado n. En particular, los *polinomios de Laguerre* generalizados se definen, para $0 \leq m \leq n$, como

$$L_n^m[x] = (-1)^m \frac{(n!)^2}{m!(n-m)!} F[-(n-m), m+1, x],$$

y surgen al resolver la ecuación de Schrödinger para el átomo de hidrógeno. Para $m = 0$ se denominan, simplemente, polinomios de Laguerre.

Es fácil ver que, si b no es entero, la otra solución linealmente independiente de (III.2.36) es

$$u_2(x) = x^{1-b} F[a-b+1, 2-b, x],$$

ya que, si se sustituye $u = x^{1-b}w$, se obtiene para w la ecuación

$$xw'' + (2-b-x)w' - (a-b+1)w = 0,$$

que es de la forma (III.2.36) con $b \to 2-b$, $a \to a-b+1$.

Para $x \to \infty$ y $a \neq -n$, $F[a,b,x] \approx \frac{\Gamma[b]}{\Gamma[a]} e^x x^{a-b}$. La función $F[a,b,x]$ está también directamente incorporada a la mayoría de los programas de cálculo analítico (por ej. [11]), y sus propiedades pueden encontrarse en [14], [15], [16].

Función Hipergeométrica

Consideremos, ahora, la ecuación

$$x(1-x)u'' + [b - (a_1 + a_2 + 1)x]u' - a_1 a_2 u = 0. \tag{III.2.38}$$

Las raíces de la ecuación indicial $s(s-1) + bs = 0$ son, nuevamente, $s = 0$ y $s = 1 - b$. Por lo tanto, si b no es 0 o entero negativo, una de las soluciones es una serie de potencias $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, con

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= c_n \frac{n(n-1+a_1+a_2+1) + a_1 a_2}{(n+1)(n+b)} \\ &= c_n \frac{(n+a_1)(n+a_2)}{(n+1)(n+b)} \end{aligned}$$

y $c_0 \neq 0$. Para $c_0 = 1$ se obtiene así la solución

$$\begin{aligned} u_1(x) &= F[a_1, a_2, b, x] \\ &\equiv 1 + \frac{a_1 a_2}{1!\,b} x + \frac{a_1(a_1+1)a_2(a_2+1)}{2!\,b(b+1)} x^2 + \ldots \\ &= \frac{\Gamma[b]}{\Gamma[a_1]\Gamma[a_2]} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma[n+a_1]\Gamma[n+a_2]}{n!\Gamma[n+b]} x^n, \end{aligned} \tag{III.2.39}$$

que se denomina *función hipergeométrica*. Converge para $|x| < 1$ (como es obvio a partir de la ecuación) y es simétrica con respecto a a_1 y a_2. Si $a_1 = -n$ (o $a_2 = -n$), con n entero positivo, se reduce a un *polinomio* de grado n. En particular, los *polinomios de Jacobi* se definen como

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma[\alpha+n+1]}{n!\Gamma[\alpha+1]} F[-n, \alpha+\beta+n+1, \alpha+1, (1-x)/2].$$

Para $\alpha = \beta = 0$ se reducen a los polinomios de Legendre, vistos anteriormente.

Es fácil ver que si b no es entero, la otra solución linealmente independiente de (III.2.38) es

$$u_2(x) = x^{1-b} F[a_2 - b + 1, a_1 - b + 1, 2 - b, x]$$

ya que, si se sustituye $u = x^{1-b} w$, se obtiene para w una ecuación del tipo (III.2.38) con $a_1 \to a_2 - b + 1$, $a_2 \to a_1 - b + 1$ y $b \to 2 - b$. Esta función y sus propiedades están también incorporadas a los programas de cálculo analítico (por ejemplo [11]) y aparecen en las tablas [14], [15], [16].

III.2.9. Desarrollos en series de autofunciones de L (funciones especiales)

1) Serie de Polinomios de Legendre

Retornemos a la ecuación de Legendre, escrita ahora en la forma

$$-((1-x^2)u')' = \lambda u\,, \quad x \in [-1,1]\,. \qquad \text{(III.2.40)}$$

Esta ecuación puede verse como la ecuación de autovalores de un operador de Sturm-Liouville, con $p(x) = 1-x^2 = (1+x)(1-x)$ y $q(x) = 0$. En este caso, $p(x)$ posee ceros simples en $x = 1$ y $x = -1$ por lo que imponemos como condición de contorno que $u(x)$ permanezca *acotada* en ambos bordes ($x = \pm 1$). Como vimos antes, esto ocurre sólo si $\alpha = l(l+1)$, con $l = 0, 1, \ldots$ (lo que determina los autovalores), y, en tal caso, para la solución con la misma paridad de l, que es un *polinomio de Legendre*:

$$u(x) = P_l(x), \quad \lambda = l(l+1), \quad l = 0, 1, \ldots\,.$$

Los polinomios de Legendre forman, pues, una base completa ortogonal en $[-1,1]$. Podemos desarrollar, entonces, una función en dicho intervalo como

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l P_l(x), \quad x \in [-1,1]\,,$$

con (recordar que $\int_{-1}^{1} P_l^2(x)dx = 2/(2l+1)$)

$$c_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_l(x)dx\,.$$

Notemos que las raíces de la ecuación indicial en $x = \pm 1$ son ambas 0. Esto implica que la solución no acotada de (III.2.40) tendrá una divergencia *logarítmica* en el extremo.

2) Serie de Polinomios asociados de Legendre

Consideremos, ahora,

$$-((1-x^2)u')' + \frac{m^2}{1-x^2}u = \lambda u\,, \quad x \in [-1,1].$$

Esta ecuación puede verse como la ecuación de autovalores de un operador de Sturm-Liouville, con $p(x) = (1-x^2)$ y $q(x) = m^2/(1-x^2)$. En este caso, $q(x)$ posee polos simples en $x = 1$ y en $x = -1$, y es positiva para $x \in (-1,1)$. La condición de contorno a imponer es, nuevamente, que la autofunción permanezca acotada en $x = 1$ y $x = -1$. Como vimos en III.2.6, esto implica, para $m > 0$ entero, que $l = m, m+1, m+2, \ldots$, con l entero, en cuyo caso $u(x)$ es el polinomio generalizado de Legendre:

$$u(x) = P_l^m(x)\,, \quad \lambda = l(l+1), \quad l = m, m+1, m+2, \ldots\,.$$

Podemos desarrollar, entonces, una función en $[-1,1]$ también como

$$f(x) = \sum_{l=m}^{\infty} c_l P_l^m(x), \quad x \in [-1,1]\,,$$

con

$$\begin{aligned} c_l &= \frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\int_{-1}^{1} f(x)P_l^m(x)dx \\ &= \frac{(-1)^m(2l+1)}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_l^{-m}(x)dx. \end{aligned}$$

3) Serie de Bessel

La ecuación de Bessel $u'' + u'/x + (k^2 - \nu^2/x^2)u = 0$ puede escribirse como

$$-(xu')' + \frac{\nu^2}{x}u = \lambda xu\,, \tag{III.2.41}$$

con $\lambda = k^2$, que corresponde a la ecuación de autovalores de un operador de Sturm-Liouville con $p(x) = x$, $q(x) = \nu/x$ y $\rho(x) = x$. Esta ecuación, con $x = r$, surge, por ejemplo, al resolver

$$-\Delta w(r,\theta) = \lambda w(r,\theta)$$

con $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, el laplaciano en coordenadas polares, en una región circular ($a_0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \theta_0$), para soluciones de la forma $w(r,\theta) = u(r)e^{i\nu\theta}$. Supondremos ν real.

Consideremos primero $x \in [0,a]$. Como p posee un cero simple en $x = 0$, la condición de contorno en $x = 0$ debe ser $|u(0)| < \infty$. En $x = a$ supondremos la condición de Dirichlet $u(a) = 0$, aunque para otras condiciones de contorno locales el procedimiento es similar. La solución general de (III.2.41) es

$$u(x) = AJ_\nu(\sqrt{\lambda}x) + BY_\nu(\sqrt{\lambda}x).$$

La condición $|u(0)| < \infty$ implica $B = 0$, mientras que la condición $u(a) = 0$ implica

$$J_\nu(\sqrt{\lambda}a) = 0,$$

o sea,

$$\sqrt{\lambda}a = k_n^\nu, \quad n = 1, 2, \ldots \quad \text{con} \quad J_\nu(k_n^\nu) = 0.$$

Aquí, k_n^ν son las raíces de $J_\nu(x)$, que forman un conjunto numerable de números reales. Los autovalores y autofunciones correspondientes son entonces

$$\lambda_n = (k_n^\nu/a)^2\,, \quad u_n(x) = J_\nu(k_n^\nu x/a)\,, \tag{III.2.42}$$

siendo las autofunciones ortogonales con respecto al producto interno $(u,v)_x = \int_0^a u(x)v(x)xdx$, es decir,

$$\int_0^a J_\nu(k_n^\nu x/a)J_\nu(k_m^\nu x/a)xdx = \delta_{nm}N_n^2,$$

donde
$$N_n^2 = \int_0^a J_\nu^2(k_n^\nu x/a)xdx = \frac{a^2}{2}J'^2_\nu(k_n^\nu). \qquad \text{(III.2.43)}$$
En efecto, multiplicando (III.2.41) por $-2xu'$ obtenemos $2[(xu')'xu'+(\lambda x^2-\nu^2)uu'] = 0$, de donde $[(xu')^2 + (\lambda x^2 - \nu^2)u^2]' = 2\lambda xu^2$ y
$$\int u^2(x)xdx = \frac{(xu')^2 + (\lambda x^2 - \nu^2)u^2}{2\lambda}\,.$$

Por lo tanto, si $u(x) = J_\nu(kx)$,
$$\int_0^a J_\nu^2(\sqrt{\lambda}x)xdx = \frac{a^2}{2}[J'^2_\nu(\sqrt{\lambda}a) + (1 - \frac{\nu^2}{a^2\lambda})J_\nu^2(\sqrt{\lambda}a],$$
que conduce al resultado (III.2.43) para $\lambda = (k_n^\nu/a)^2$.

El conjunto de autofunciones $\{J_\nu(k_n^\nu x/a),\ n = 1, 2, \ldots,\}$ es completo en $[0, a]$ por ser L autoadjunto con las presentes condiciones de contorno. Entonces, para $x \in [0, a]$, podemos desarrollar una función f que satisfaga dichas condiciones como
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n J_\nu(k_n^\nu x/a),$$
donde señalamos que la suma es sobre n y no ν, con
$$c_n = \frac{2}{a^2 J'^2_\nu(k_n^\nu)} \int_0^a f(x)J_\nu(k_n^\nu x/a)xdx\,.$$

Por ejemplo, los primeros ceros de $J_0(x)$ son
$$k_1^0 \approx 2,405 = 0{,}765\pi,\ k_2^0 \approx 5,52 = 1,76\pi,\ k_3^0 \approx 8,65 = 2,75\pi\,,$$
con $k_n^0 \approx (n - \frac{1}{4})\pi$ para n grande, en virtud de las fórmulas asintóticas para $J_0(x)$.

Para una condición de contorno de Neumann en $x = a$ ($u'(a) = 0$), el tratamiento es similar, pero tendremos que utilizar los ceros de $J'_\nu(x)$.

En el caso de un anillo $0 < a < x < b$, con condiciones de contorno de Dirichlet $u(a) = u(b) = 0$, la solución general de (III.2.41) será
$$u(x) = A[J_\nu(\sqrt{\lambda}x) + \alpha Y_\nu(\sqrt{\lambda}x)].$$
Tanto los autovalores λ_n como los coeficientes α_n que determinan las autofunciones deben obtenerse a partir de las ecuaciones $u(a) = 0$, $u(b) = 0$.

Problema sugerido III.2.2: i) Mostrar que la ecuación
$$u'' + 2u'/x + (k^2 - l(l + 1)/x^2)u = 0\,,$$

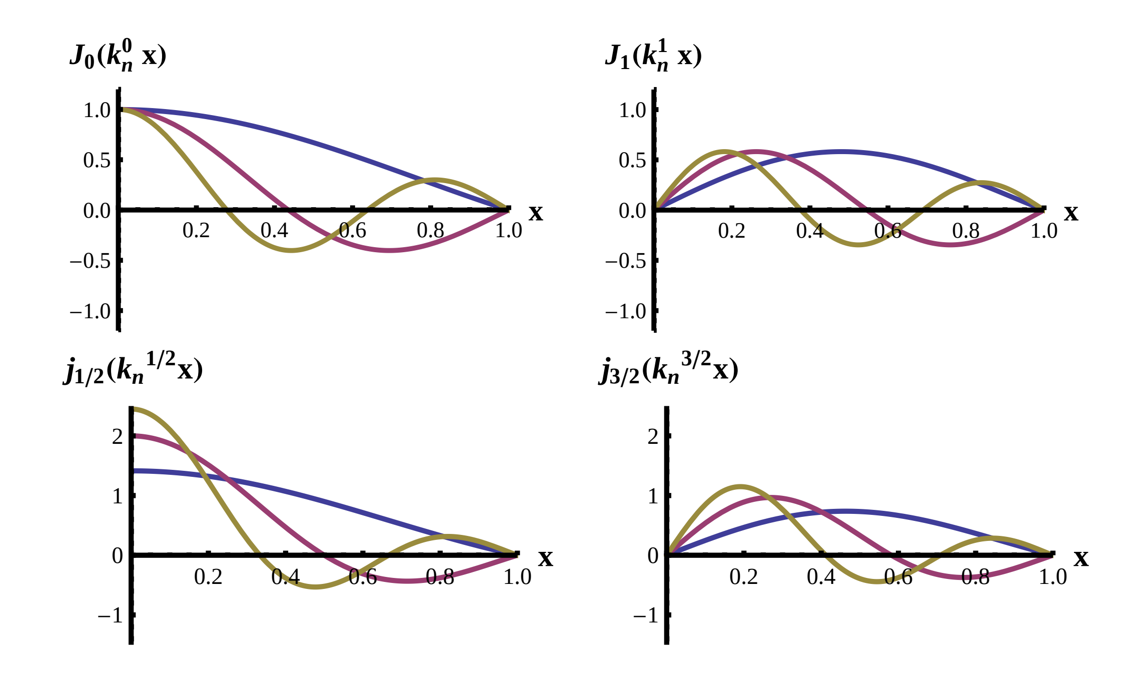


Figura 21: Gráficas de las primeras tres autofunciones (III.2.42) (arriba, funciones de Bessel) y (III.2.44) (abajo, funciones de Bessel esféricas), para $\nu = 0, 1$ y $l = 0, 1$ respectivamente.

con $0 < x < a$, $u(a) = 0$, corresponde al problema de autovalores de Sturm-Liouville

$$(x^2u')' - l(l+1)u = x^2\lambda u\,,$$

con $\lambda = k^2$.
ii) Mostrar que los autovalores y autofunciones son

$$\lambda_n = (k_n^{l+1/2})^2/a^2, \quad u_n(x) = j_n(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{x}} J_{l+1/2}(k_n^l x/a)\,, \qquad \text{(III.2.44)}$$

con $k_n^{l+1/2}$ las raíces de $J_{l+1/2}(x)$.
iii) Plantear el desarrollo en serie correspondiente y dar una expresión para los coeficientes del mismo.

Capítulo IV

Serie y Transformada de Fourier

IV.1. Serie de Fourier

Como hemos visto en la sección III.1.5, cada operador de Sturm-Liouville con su dominio definido por ciertas condiciones de contorno determina un desarrollo para una dada función f en serie de autofunciones dentro de un cierto intervalo. Para $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ y $\rho(x) = 1$, la serie correspondiente se denomina, en general, serie trigonométrica o serie de Fourier, y la estudiaremos aquí en detalle. Analizaremos, primero, la base proporcionada por las autofunciones periódicas de L en $[-\pi, \pi]$, de la cual pueden derivarse los demás casos.

Las autofunciones correspondientes a tal operador de Sturm-Liouville, caso particular, con $a = \pi$, de las ya obtenidas en el ejemplo (II.7.4), son de la forma:

$$u_0(x) = C; \qquad u_n(x) = \begin{cases} A\sin(nx) \\ B\cos(nx) \end{cases} \qquad n = 1, ...\infty\,. \tag{IV.1.1}$$

La propiedad fundamental 2) en la misma sección asegura la convergencia absoluta y uniforme del desarrollo en estas autofunciones para funciones con derivada segunda que satisfacen las condiciones de contorno periódicas en $[-\pi, \pi]$; pero el desarrollo es aplicable también a funciones más generales, como discutiremos más adelante en esta sección.

IV.1.1. Coeficientes de Fourier

Supongamos, primero, que tal desarrollo es convergente a $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)],\ \forall x \in (-\pi, \pi). \tag{IV.1.2}$$

En primer lugar, suponiendo válida la expansión (IV.1.2), los coeficientes a_n, b_n pueden determinarse haciendo uso de la ortogonalidad (y la norma) de las funciones $\cos(nx)$ y $\sin(nx)$, discutida anteriormente. Por ejemplo, integrando ambos lados de (IV.1.2) entre $-\pi$ y π, tendremos

$$\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x) = \pi a_0\,. \tag{IV.1.3}$$

Notemos que $\frac{1}{2}a_0 = \bar{f} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$ es el *valor medio* de f en $[-\pi, \pi]$.

Para calcular a_n, $n \neq 0$, multiplicamos ambos miembros de (IV.1.2) por $\cos(kx)$, $k \neq 0$, e integramos entre $-\pi$ y π, de donde resulta

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\cos(kx),\ \ k = 1, ..., \infty\,. \tag{IV.1.4}$$

Similarmente, multiplicando por $sin(kx)$, $k \neq 0$, e integrando:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dx\, f(x)\sin(kx),\ \ k = 1, ..., \infty\,. \tag{IV.1.5}$$

Los coeficientes así determinados se denominan coeficientes de Fourier. La serie resultante está dada por

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} dx' f(x')\left[\cos(nx)\cos(nx')\right. \\ &+ \left.\sin(nx)\sin(nx')\right] , \end{aligned} \tag{IV.1.6}$$

que puede escribirse en forma más compacta como

$$f(x) = \bar{f} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} dx' f(x')\cos\left[n(x-x')\right], \tag{IV.1.7}$$

donde $\bar{f}$ es el valor promedio de la función $f(x)$ en el intervalo.

IV.1.2. Teoremas de Fourier sobre convergencia puntual

Según se adelantó, estudiaremos ahora condiciones más débiles para la convergencia de la serie de Fourier, contenidas en dos teoremas, también conocidos como teoremas de Fourier. Para poder demostrarlos, necesitaremos demostrar antes el siguiente lema:

Lema IV.1.1 (de Riemann-Lebesgue) *Si g es continua en $[a, b]$ salvo, a lo sumo, en un número finito de puntos en los que permanece acotada, entonces*

$$\lim_{s\to\infty}\int_a^b g(x)\sin(sx+\alpha)dx = 0\,. \tag{IV.1.8}$$

Demostración *Si g es derivable en $[a, b]$, la demostración es inmediata. En efecto, integrando por partes,*

$$\begin{aligned} &\int_a^b g(x)\sin(sx+\alpha)dx = -\int_a^b g(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{\cos(sx+\alpha)}{s}\right]dx = \\ -\;\; & g(x)\frac{\cos(sx+\alpha)}{s}\bigg|_a^b + \int_a^b g'(x)\frac{\cos(sx+\alpha)}{s}dx\,, \end{aligned} \tag{IV.1.9}$$

expresión que tiende a 0 para $s \to \infty$. El mismo razonamiento es válido si g es derivable salvo en un número finito de puntos, siempre y cuando existan (y sean finitas) las derivadas laterales.

Si g es sólo continua en $[a, b]$, sea $(x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b)$ una partición de $[a, b]$,

con $x_i - x_{i-1} = (b-a)/n$*. Entonces,*

$$
\begin{aligned}
&|\int_a^b g(x)\sin(sx+\alpha)dx| = |\sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\sin(sx+\alpha)dx| \\
&= |\sum_{i=1}^n \{g(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin(sx+\alpha)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} [(g(x)-g(x_i)]\sin(sx+\alpha)dx\}| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \left[|g(x_i)|\frac{|\cos(sx_i+\alpha)-\cos(sx_{i-1}+\alpha)|}{s} + \frac{m_i(b-a)}{n}\right] \\
&\leq \frac{2Mn}{s} + M_n(b-a)\,, \qquad \text{(IV.1.10)}
\end{aligned}
$$

donde M *es el máximo de* g *en* $[a,b]$, m_i *el máximo de* $|g(x)-g(x_i)|$ *en* $[x_{i-1},x_i]$ *y* M_n *el máximo de los* m_i*. Por lo tanto,*

$$\lim_{s\to\infty} |\int_a^b g(x)\sin(sx)|dx \leq M_n(b-a),$$

pero M_n *puede hacerse tan chico como se desee al aumentar* n *por ser* g *continua (*$\lim_{n\to\infty} M_n = 0$*). Lo mismo ocurre si reemplazamos* $\sin(sx+\alpha)$ *por* $\cos(sx+\alpha)$*. Esto demuestra el lema aun si* $g(x)$ *no es derivable en ningún punto.*

Finalmente, si g *es discontinua sólo en un número finito de puntos en los que permanece acotada, podemos separar estos puntos* x_c *mediante integrales* $\int_{x_c-\varepsilon}^{x_c+\varepsilon} g(x)\sin(sx+\alpha)\,dx$*, que tienden a* 0 *para* $\varepsilon \to 0$ *por ser* g *acotada, y repetir el razonamiento anterior en los intervalos restantes, donde es continua.*

□

Ahora sí podemos demostrar tres teoremas de Fourier sobre la convergencia de la serie.

Teorema IV.1.2 (Teorema 1 de Fourier) *Sea* $f(x)$ *derivable (por lo tanto, continua) en* $[-\pi,\pi]$*; entonces, la igualdad (IV.1.7) vale* $\forall x \in (-\pi,\pi)$*. Si, además,* $f(-\pi) = f(\pi)$*, la serie converge a* f *en* $[-\pi,\pi]$*.*

Demostración *Las sumas parciales en (IV.1.7) están dadas por*

$$
\begin{aligned}
S_n(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^n a_m\cos(mx) + b_m\sin(mx) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt\{\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos(mx)\cos(mt)+\sin(mx)\sin(mt)\} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\, f(t)\{\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^n\cos[m(t-x)]\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(t-x)\,dt\,,
\end{aligned}
$$

con

$$\begin{aligned} K_n(s) &= \frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos[ms] = \frac{1}{2}\sum_{m=-n}^{n} e^{ims} = \frac{e^{i(n+1)s}-e^{-ins}}{2(e^{is}-1)} \\ &= \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})s]}{2\sin[\frac{1}{2}s]}, \end{aligned} \tag{IV.1.11}$$

donde se supone que, si $s=0$ *o, en general,* $s=2k\pi$*, con* k *entero,* $K_n(2k\pi)=\lim\limits_{s\to 2k\pi} K_n(s)=n+\frac{1}{2}$*, que es el valor correcto de la suma para* $s=2k\pi$*. Además, de la suma de cosenos que define a* $K_n(s)$ *se ve que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x)dt=\pi. \tag{IV.1.12}$$

Por lo tanto, sumando y restando $f(x)$*,*

$$\begin{aligned} S_n(x) &= f(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t)-f(x))K_n(t-x)dt \\ &= f(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)-f(x)}{2\sin[\frac{1}{2}(t-x)]}\sin[(n+\frac{1}{2})(t-x)]dt. \end{aligned} \tag{IV.1.13}$$

Usando el lema de Riemann-Lebesgue es, ahora, inmediato demostrar la convergencia para $x\in(-\pi,\pi)$*. En este caso, la función* $g(t)=\frac{f(t)-f(x)}{2\sin[(t-x)/2]}$ *si* $t\neq x$*, con* $g(x)=f'(x)$*, es continua* $\forall\, t\in[-\pi,\pi]$*, incluyendo* $t=x$*, si* f *es derivable:*

$$\lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{2\sin[\frac{1}{2}(t-x)]}=f'(x)\,,$$

por lo que la integral en (IV.1.13) se anula para $n\to\infty$ *y*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=f(x)\ \ \forall\, x\in(-\pi,\pi)\,. \tag{IV.1.14}$$

Hasta aquí, hemos demostrado la primera parte del enunciado.

Si $x=\pm\pi$*, el denominador de* $g(t)$ *se anula tanto para* $t\to\pi$ *como para* $t\to-\pi$*. Sin embargo, si* $x=\pm\pi$*,* $K_n(t-x)$ *es una función par de* t*. En efecto,*

$$\begin{aligned} K_n(t\mp\pi) &= \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})(t\mp\pi)\right]}{2\sin\left(\frac{t\mp\pi}{2}\right)} = \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})(-t\pm\pi)\right]}{2\sin\left(\frac{-t\pm\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left[(n+\frac{1}{2})(-t\mp\pi)\right]}{2\sin\left(\frac{-t\mp\pi}{2}\right)} \end{aligned} \tag{IV.1.15}$$

y, por lo tanto,

$$\int_{-\pi}^{0} K_n(t-x)dt=\int_{0}^{\pi} K_n(t-x)dt=\frac{1}{2}\pi\,.$$

Para $x = \pm\pi$ podemos, entonces, escribir

$$S_n(x) = \frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(t)-f(\pi)}{2\sin[\frac{1}{2}(t-x)]}\sin[(n+\frac{1}{2})(t-x)]dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{f(t)-f(-\pi)}{2\sin[\frac{1}{2}(t-x)]}\sin[(n+\frac{1}{2})(t-x)]dt, \quad \text{(IV.1.16)}$$

donde el primer y segundo cociente permanecen acotados para $t \to \pi$ y $t \to -\pi$ respectivamente (tienden a $f'(\pm\pi)$). Aplicando el lema de Riemann, obtenemos, pues,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\pm\pi) = \frac{f(\pi)+f(-\pi)}{2}\,,$$

que coincide con $f(\pm\pi)$ si $f(\pi) = f(-\pi)$.

□

Teorema IV.1.3 (Teorema 2 de Fourier) *Si f es continua en $[a,b]$ pero $f'(x)$ no existe en un número finito de puntos aislados x_c, donde sí existen, en cambio, las derivadas laterales*

$$f'^{\pm}(x_c) = \lim_{t\to x_c^{\pm}} \frac{f(t)-f(x_c)}{t-x_c}\,, \quad \text{(IV.1.17)}$$

la serie de Fourier converge a $f(x)$, aun para $x = x_c$.

Demostración: En las condiciones enunciadas, $g(t) = \frac{f(t)-f(x)}{2\sin[(t-x)/2]}$ es continua para $t \neq x$ y permanece acotada para $t \to x$, aun si $x = x_c$ ($\lim_{t\to x_c^{\pm}} g(t) = f'^{\pm}(x_c)$), cumpliendo con las condiciones del lema de Riemann-Lebesgue.

□

Teorema IV.1.4 (Teorema 3 de Fourier) *Si f es continua y derivable en $[-\pi,\pi]$, salvo en un número finito de puntos aislados x_c, en los que existen, sin embargo, los límites y derivadas laterales*

$$f(x_c^{\pm}) \equiv \lim_{x\to x_c^{\pm}} f(x), \quad f'^{\pm}(x_c) = \lim_{t\to x_c^{\pm}} \frac{f(t)-f(x_c^{\pm})}{t-x_c},$$

entonces la serie también converge a $f(x)$ en los puntos $x \in (-\pi,\pi)$ donde f es continua. En los puntos x_c donde es discontinua, la serie converge al punto medio:

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{1}{2}[f(x_c^+) + f(x_c^-)]. \quad \text{(IV.1.18)}$$

Demostración*: En primer lugar, si $x \in (-\pi,\pi)$, combinando (IV.1.12) con el lema (IV.1.8) obtenemos, para $\varepsilon > 0$,*

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x)dt = \lim_{n\to\infty}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} K_n(t-x)dt = 2\lim_{n\to\infty}\int_{x}^{x+\varepsilon} K_n(t-x)dt = 2\lim_{n\to\infty}\int_{x}^{\pi} K_n(t-x)dt, \quad \text{(IV.1.19)}$$

por ser $K_n(s)$ par.

Notemos, ahora, que $g(t) = \frac{f(t)-f(x)}{2\sin[(t-x)/2]}$ satisface las condiciones del lema para $t \in [-\pi, \pi]$ si $x \neq x_c$, y para $t \neq x_c$ si $x = x_c$. En este caso,

$$S_n(x_c) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{x_c} f(t)K_n(t-x_c)dt + \frac{1}{\pi}\int_{x_c}^{\pi} f(t)K_n(t-x_c)dt. \qquad (\text{IV}.1.20)$$

La segunda integral puede escribirse como

$$\frac{f(x_c^+)}{\pi}\int_{x_c}^{\pi} K_n(t-x_c)dt + \int_{x_c}^{\pi} \frac{f(t)-f(x_c^+)}{2\pi\sin[\frac{1}{2}(t-x_c)]}\sin[(n+\frac{1}{2})(t-x_c)]dt.$$

Para $n \to \infty$, el segundo término se anula por el lema de Riemann, pues $g(t) = \frac{f(t)-f(x_c^+)}{2\sin[\frac{1}{2}(t-x_c)]}$ permanece acotado para $t \to x_c^+$ ($\lim\limits_{t\to x_c^+} g(t) = f'^+(x_c)$), mientras que el primer término tiende a $\frac{1}{2}f(x_c^+)$. Análogamente, la primera integral en (IV.1.20) tiende a $\frac{1}{2}f(x_c^-)$. Esto conduce al resultado (IV.1.18).

□

IV.1.3. Otras formas de convergencia

Convergencia uniforme: Si f posee derivada continua en $[-\pi, \pi]$, y $f[-\pi] = f[\pi]$, puede demostrarse que la convergencia de la serie de Fourier es *absoluta* y *uniforme* para $x \in [-\pi, \pi]$. En este caso la serie de Fourier es derivable término a término, convergiendo la serie derivada a $f'(x)$ para $x \in (-\pi, \pi)$.

Si $f(x)$ es discontinua en un punto x_c o $f[-\pi] \neq f[\pi]$ entonces la convergencia *no es uniforme*. Esto es evidente, ya que una serie de funciones continuas no puede converger uniformemente a una función discontinua. En las mismas condiciones, si derivamos la serie término a término obtendremos una serie que no necesariamente es convergente punto a punto (véase el ejemplo IV.1.4 en la sección IV.1.7). Otra de las manifestaciones de la convergencia no uniforme es el fenómeno de Gibbs en los bordes de una discontinuidad.

Puede demostrarse que, si f es continua en $[-\pi, \pi]$ y posee un número *finito* de máximos y mínimos locales, se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$ para $x \in (-\pi, \pi)$, aun cuando f no sea derivable.

Finalmente, puede demostrarse que basta con exigir la existencia de $\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^p dx$ para $p = 1$ y $p = 2$, para demostrar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2 dx = 0.$$

Este tipo de convergencia se denomina convergencia en media y es menos restrictiva que la convergencia puntual.

Los detalles de las demostraciones de nuestras afirmaciones previas pueden encontrarse en [7].

Aún menos exigente es la convergencia como distribución (convergencia débil): Se dice que S_n converge a f como distribución si

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_n(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx$$

para cualquier función de prueba g, aun si la serie $S_n(x)$ no converge puntualmente en ningún punto (véase el ejemplo IV.1.3 en la sección IV.1.7). Este tipo de convergencia es frecuentemente utilizado en Física.

IV.1.4. Forma compleja del desarrollo

Como $\begin{matrix}\cos(nx)\\ i\sin(nx)\end{matrix} = \frac{1}{2}(e^{inx} \pm e^{-inx})$, podemos escribir (IV.1.2) como una serie de potencias en e^{ix},

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_n^* e^{-inx}) = P\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

con $P\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} = \lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=-m}^{m}$ el valor principal y

$$c_n = c_{-n}^* = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx\,.$$

IV.1.5. Serie de Fourier para otros intervalos de periodicidad

Si f está definida en $[-a, a]$, el reemplazo $x \to x\pi/a$ conduce al desarrollo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x), \qquad \text{(IV.1.21)}$$

para $x \in (-a, a)$, donde

$$\omega = \pi/a,$$

$$a_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\cos(n\omega x)dx, \quad b_n = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin(n\omega x)dx.$$

La serie converge a una función periódica de período $2a = 2\pi/\omega$, siendo ω la frecuencia correspondiente. En la forma compleja,

$$f(x) = P\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}, \quad c_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)e^{-in\omega x}dx.$$

IV.1.6. Desarrollos de medio rango. Series de senos y de cosenos

Si $f(x)=f(-x)$ (función *par*) $\Rightarrow b_n=0\;\forall\; n$ y

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\omega x), \\ a_n &= \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos(n\omega x)dx. \end{aligned} \tag{IV.1.22}$$

Si $f(x)=-f(-x)$ (función *impar*) $\Rightarrow a_n=0\;\forall\; n$ y

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(n\omega x), \\ b_n &= \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin(n\omega x)dx. \end{aligned} \tag{IV.1.23}$$

Una función f definida sólo en $[0,a]$ puede, entonces, desarrollarse en serie de cosenos o senos, convergiendo la serie a la extensión periódica par o impar de f. Estos desarrollos corresponden al problema de autovalores de L en $[0,a]$, con las condición de contorno de Neumann (caso par) y Dirichlet (caso impar).

IV.1.7. Algunos ejemplos

Ejemplo IV.1.1: $f(x)=x$, $x\in[-\pi,\pi]$. Se obtiene $a_n=0\;\forall n$ y

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(nx)dx=\frac{2(-1)^{n+1}}{n},$$

por lo que

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin(nx)}{n},\quad |x|<\pi\,. \tag{IV.1.24}$$

En $x=\pm\pi$, la serie converge a $\frac{1}{2}[f(\pi)+f(-\pi)]=0$.

La serie converge, en realidad, a la extensión periódica

$$f(x)=x-2n\pi\;\;\text{si}\;\;-\pi+2n\pi<x<\pi+2n\pi\,,$$

siendo discontinua en $x=\pm\pi+2n\pi$.

Ejemplo IV.1.2: Si $f(x)=\frac{1}{2}x^2$, $b_n=0\;\forall\; n$ y $a_n=2(-1)^n/n^2$ si $n\geq 1$, con $a_0=\pi^2/3$, por lo que

$$\frac{1}{2}x^2=\frac{\pi^2}{6}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2},\quad |x|\leq\pi,$$

que coincide con la integral término a término de la serie (V.5.22). El desarrollo converge también en $x = \pm\pi$, ya que $f(\pi) = f(-\pi)$. Para $x = 0$ y π, el desarrollo anterior conduce a las identidades

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Ejemplo IV.1.3:

$$f(x) = \frac{1}{2a}, \;\; |x| < a < \pi\,,$$

con $f(x) = 0$ si $|x| > a$. Obtenemos $b_n = 0$ y $a_n = \sin(na)/(n\pi a)$ si $n \geq 1$, con $a_0 = 1/\pi$. Por lo tanto,

$$f(x) = \frac{1}{\pi}[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{na}\cos(nx)], \quad |x| \leq \pi. \qquad \text{(IV.1.25)}$$

Para $x = \pm a$, la serie converge al valor medio $\frac{1}{4a}$.

Se pueden extraer dos conclusiones muy importantes:

i) Al disminuir a, aumenta el número de coeficientes a_n con valor apreciable en (IV.1.25). En efecto, $\sin(na)/na \approx 1$ si $n \ll 1/a$, anulándose por primera vez para $n \approx \pi/a$. El número de coeficientes a_n con valor apreciable aumenta, por lo tanto, como $1/a$ al disminuir a. *Cuanto más corto es el pulso (respecto de π) mayor es el número de frecuencias necesarias para representarlo correctamente*.

ii) Para $a \to 0$, $f(x) \to \delta(x)$ y obtenemos como límite

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)] = \frac{1}{2\pi}P\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}\,, \quad |x| \leq \pi,$$

que puede obtenerse directamente utilizando las fórmulas usuales para $f(x) = \delta(x)$. La serie anterior *no converge puntualmente*, pero sí converge *como distribución* a $\delta(x)$ para $|x| \leq \pi$. En efecto, la suma parcial es

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos(mx)] = \frac{\sin[(n+\frac{1}{2})x]}{2\pi\sin(\frac{1}{2}x)}$$

y satisface, utilizando el lema de Riemann,

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)dx = 1, \;\; \forall n \geq 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} S_n(x)f(x)dx = f(0) + \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(x)-f(0)}{\sin(\frac{1}{2}x)}\sin[(n+\frac{1}{2})x]dx = f(0),$$

$\forall$ función de prueba f. Por periodicidad obtenemos, entonces, para $x \in \Re$,

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2m\pi) = \frac{1}{\pi}[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)] = \frac{1}{2\pi} P \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx}.$$

Ejemplo IV.1.4: Si derivamos término a término el desarrollo (IV.1.24) de $f(x) = x$ obtenemos la serie

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos(nx), \qquad \text{(IV.1.26)}$$

que no converge puntualmente. Esto se debe a que $f(-\pi) \neq f(\pi)$, siendo entonces la convergencia de (IV.1.24) no uniforme. No obstante, (IV.1.26) converge como distribución a

$$f'(x) = 1 - 2\pi \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - \pi + 2m\pi),$$

que es la derivada (como distribución) de la extensión periódica de x.

Ejemplo IV.1.5: Desarrollo en serie de Fourier de medio rango de la función de Green en $[0, a]$ para condiciones de contorno de Dirichlet:

$$G(x, x') = \{^{x(1-x'/a) \;\; 0<x<x'<a}_{x'(1-x/a) \;\; 0<x'<x<a} \, .$$

Se obtienen los coeficientes $b_n = \frac{2}{a}\int_0^a G(x, x')\sin(n\pi x/a)dx = \sin(n\pi x'/a)/(n\pi/a)^2$. Por lo tanto,

$$G(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x/a)\sin(n\pi x'/a)}{(n\pi/a)^2} \, ,$$

que coincide con el desarrollo general en autofunciones presentado en (III.1.5), $G(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)u_n(x')/\lambda_n$.

Ejemplo IV.1.6: Pulso cuadrado y "Fenómeno de Gibbs"
Consideremos ahora en detalle el desarrollo en serie de Fourier en $[-1, 1]$ de $f(x) = H(1/2 - |x|)$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| < 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases} \qquad \text{(IV.1.27)}$$

en el intervalo: $[-1, 1]$. Los coeficientes de Fourier son:

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{2}{n\pi} & n \;\text{ impar} \\ 1 & n = 0 \\ 0 & n \geq 2, \;\text{par} \end{cases} \quad , \quad b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)dx = 0 \, .$$

La suma parcial de orden n (impar) es entonces

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \tfrac{1}{2}a_0+\sum_{m=1}^{n} a_m\cos(m\pi x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m\,\mathrm{impar}}^{n}\frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}\cos(m\pi x)}{m}\\ &= \tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{\pi}[\cos(\pi x)-\tfrac{1}{3}\cos(3\pi x)+\tfrac{1}{5}\cos(5\pi x)-\ldots+\tfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n}\cos(n\pi x)]\,. \end{aligned}$$

Podemos ver que, en este caso, para n impar,

$$\begin{aligned} S'_n(x) &= -2[\sin(\pi x)-\sin(3\pi x)+\sin(5\pi x)-\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin(n\pi x)]\\ &= (-1)^{\frac{n+1}{2}}\frac{\sin[\pi(n+1)x]}{\cos(\pi x)} \end{aligned}$$

pues, escribiendo $\sin(n\pi x)=\frac{e^{in\pi x}-e^{-in\pi x}}{2i}$, la suma parcial $S'_n(x)$ puede expresarse como una suma geométrica.

Si $x=1/2+\delta$, es fácil ver que

$$S'_n(1/2+\delta)=-\frac{\sin[(n+1)\pi\delta]}{\sin(\pi\delta)}\,.$$

En primer lugar, esto muestra que, para $x\to 1/2$ ($\delta\to 0$), $S'_n(x)\to -(n+1)$, como se observa en las dos últimas gráficas, divergiendo para $n\to\infty$. Análogamente, $S'_n(x)\to (n+1)$ para $x\to -1/2$.

En segundo lugar, vemos que el 0 de $S'_n(x)$ más próximo a $x=1/2$ ocurre para $\delta=\pm 1/(n+1)$. Estos valores corresponden al mínimo y máximo de $S_n(x)$ más próximo a $x=1/2$, que son precisamente los valores extremos de $S_n(x)$ como se aprecia en las figura 22. Estos valores son, definiendo $\delta_n=1/(n+1)$,

$$\begin{aligned} S_n(\frac{1}{2}\pm\delta_n) &= \frac{1}{2}+\int_{1/2}^{1/2\pm\delta_n} S'_n(x)dx=\frac{1}{2}-\int_0^{\pm\delta_n}\frac{\sin[(n+1)\pi\delta]}{\sin(\pi\delta)}d\delta\\ &= \frac{1}{2}\mp\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(t)}{(n+1)\sin[t/(n+1)]}dt\,. \end{aligned}$$

Para $n\gg 1$, $(n+1)\sin[t/(n+1)]\approx t$ y obtenemos

$$S_n(\frac{1}{2}\pm\delta_n)\approx\frac{1}{2}\mp\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(t)}{t}dt=\frac{1}{2}\mp\frac{\mathrm{sinintegral}(\pi)}{\pi}=\left\{\begin{array}{c}-0{,}08949\ldots\\ 1{,}08949\ldots\end{array}\right.\,,$$

lo que indica un exceso del $\approx 8,9\,\%$ en ambos lados de la discontinuidad. Para $n\to\infty$, estos valores son *exactos*. Esto implica que al aumentar n, este exceso, denominado *"fenómeno de Gibbs"*, *no desaparece*, es decir, no se "aplasta", pero ocurre para valores cada vez más próximos a $1/2$, pues $\delta_n\to 0$. No afecta, pues, el valor del límite $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ en cualquier punto x fijo, incluyendo $x=1/2$ (pues $S_n(1/2)=1/2\;\forall\, n$).

Nótese también que este exceso de las sumas parciales finitas ocurrirá en los bordes de toda discontinuidad finita. Siempre podemos considerar una función con una discontinuidad finita $f(x_0^+)-f(x_0^-)=\alpha\neq 0$ en un punto x_0, como la suma de una función continua más una función tipo escalón similar a la del presente ejemplo, pero multiplicada por α y trasladada a x_0, que originará entonces el mismo exceso relativo.

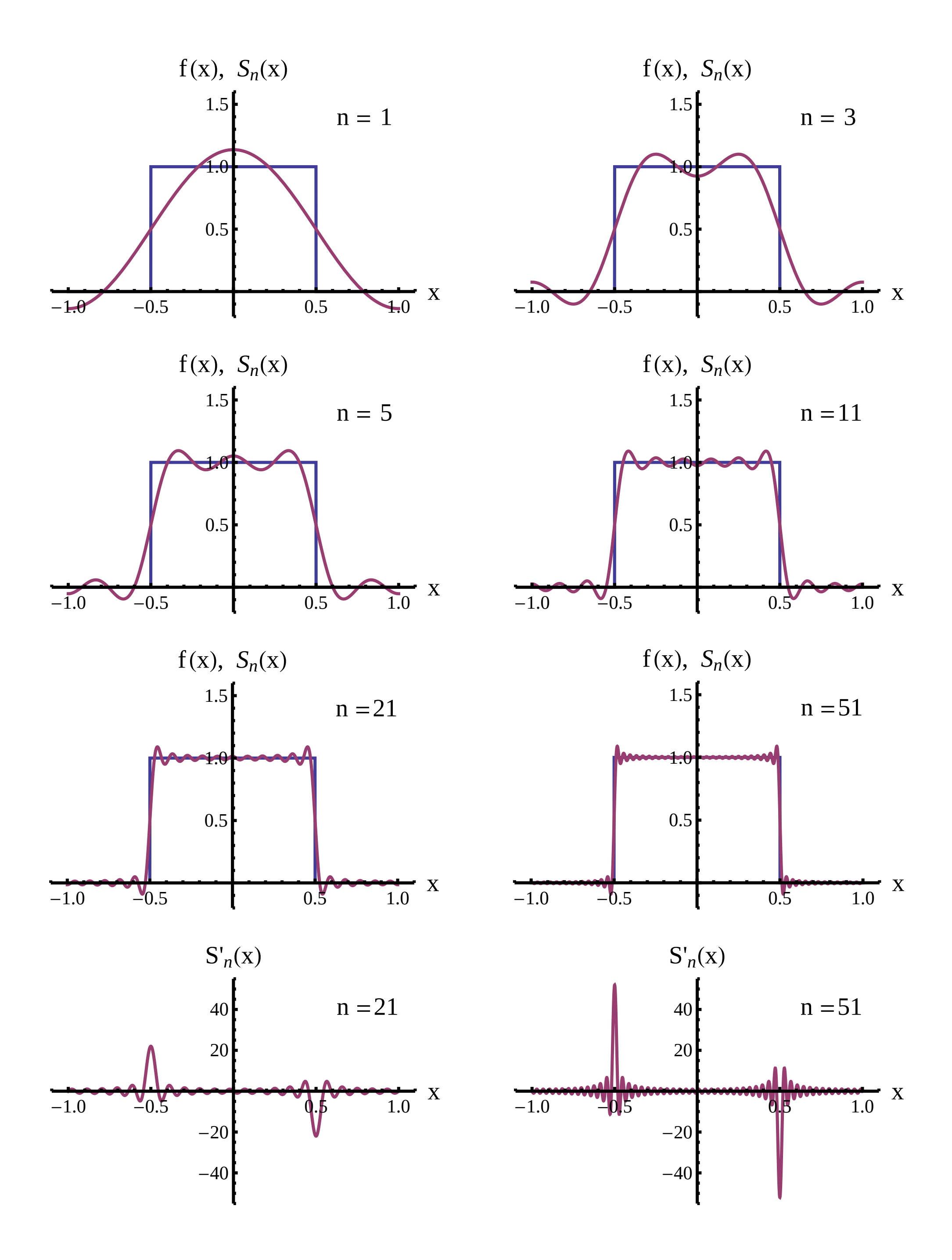


Figura 22: Gráfica de la función (IV.1.27) y las correspondientes sumas parciales de Fourier $S_n(x)$ para $n = 1, 3, 5, 11, 21, 51$. Los dos últimos paneles muestran la gráfica de la derivada $S'_n(x) = \frac{dS_n}{dx}$ para $n = 21$ y 51, que converge como distribución a $f'(x) = \delta(x + \frac{1}{2}) - \delta(x - \frac{1}{2})$ en $[-1, 1]$.Estas gráficas muestran el comportamiento de las sumas parciales de la serie de Fourier para una función discontinua, y ponen en evidencia el carácter no uniforme de la convergencia y la existencia del llamado *fenómeno de Gibbs* en los puntos de discontinuidad, explicado en el texto.

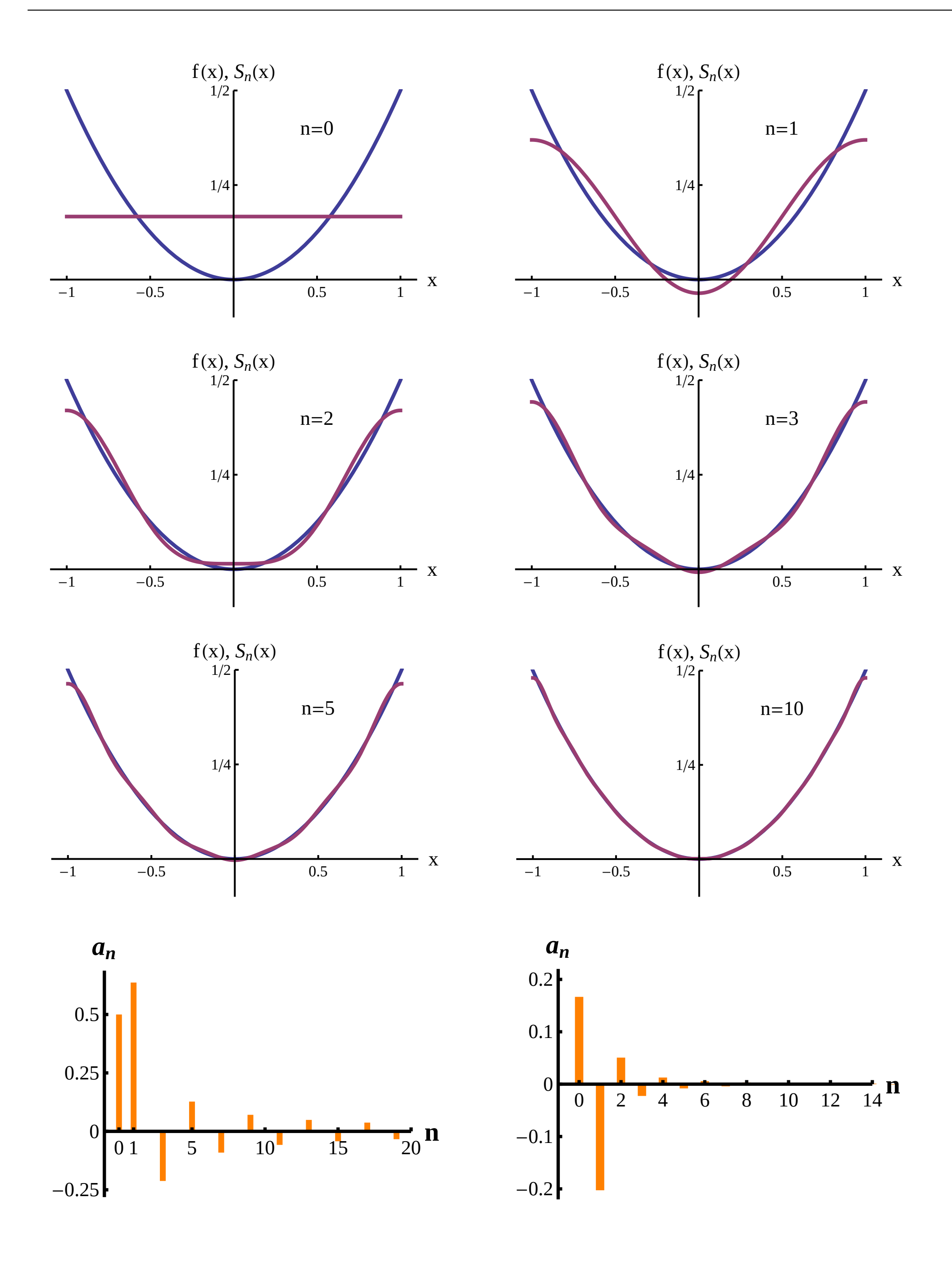


Figura 23: Gráfico de $f(x) = x^2/2$ y las correspondientes sumas parciales de Fourier $S_n(x) = 1/6 + \frac{2}{\pi^2}\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{m^2}\cos(m\pi x)$ en el intervalo $[-1,1]$, para algunos valores de n. La prolongación periódica de esta función es continua (aunque no derivable) en $x = \pm 1$, y por lo tanto el fenómeno de Gibbs no se produce en el borde. El último panel muestra los coeficientes de Fourier a_n en el ejemplo de la fig. 22 (izquierda) y en el presente (derecha). Los coeficientes decrecen más rápidamente en este caso, asegurando convergencia absoluta de la serie $\forall\, x$.

IV.2. Transformada de Fourier

IV.2.1. Definición y unicidad

Consideremos nuevamente la forma compleja del desarrollo en serie de Fourier de una función $f : [-L, L] \to \Re$:

$$f(x) \;=\; P\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}\,, \quad c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}dx, \qquad \text{(IV.2.1)}$$

donde $P\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}$ indica el valor principal $P\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} = \lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{n=-m}^{m}$. Podemos reescribir la serie como

$$f(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_k F(k)e^{ikx}\Delta k, \qquad \text{(IV.2.2)}$$

donde $k = \frac{n\pi}{L}$, $\Delta k = \frac{\pi}{L}$ y

$$F(k) = \sqrt{2\pi}c_n\frac{L}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-L}^{L} f(x)e^{ikx}dx. \qquad \text{(IV.2.3)}$$

Consideremos ahora el límite $L \to \infty$. En este límite, $\Delta k \to 0$ y las ecuaciones (IV.2.2)–(IV.2.3) tienden a

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx}dk, \qquad \text{(IV.2.4)}$$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}dx\,, \qquad \text{(IV.2.5)}$$

suponiendo que ambas integrales converjan. Aquí, hemos denotado $\int_{-\infty}^{\infty} \equiv \lim\limits_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}$. Es decir, las integrales son consideradas en valor principal.

La función $F : \Re \to \Re$ definida por (IV.2.5) se denomina **Transformada de Fourier** (TF) de la función f ($f : \Re \to \Re$) y la expresión (IV.2.4), que recupera f a partir de F, es la “antitransformada” de F. Estas expresiones constituyen la generalización de la serie de Fourier para funciones f definidas en $(-\infty, \infty)$ (y de módulo integrable). Hemos elegido las constantes de modo de hacer evidente la simetría de las ecuaciones (IV.2.4)-(IV.2.5). Sin embargo, son posibles también otras convenciones para definir la TF (puede, por ejemplo, omitirse el factor $1/\sqrt{2\pi}$ en (IV.2.4) y reemplazar el de (IV.2.5) por $1/(2\pi)$ o viceversa, y también reemplazar $e^{\pm ikx}$ por $e^{\mp ikx}$). Las ecuaciones (IV.2.4)–(IV.2.5) son válidas para cualquier función $f : \Re \to \Re$ continua que satisfaga $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx < \infty$ y que posea un número finito de máximos y mínimos. Si f posee una discontinuidad aislada finita en un punto x_0, la integral en (IV.2.4) converge al punto medio, como ocurre en la serie de Fourier.

Desde el punto de vista físico, la expresión (IV.2.4) se entiende como el desarrollo de la función $f(x)$ en términos de funciones armónicas puras $e^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$, de frecuencia k (y período $2\pi/k$), siendo $F(k)$ el peso (amplitud) de la frecuencia k en la expansión de f.

Demostraremos ahora explícitamente la validez de las ecuaciones (IV.2.4)–(IV.2.5) (equivalentemente, que la relación entre TF y antitransformada de Fourier es uno a uno) para funciones f continuas y derivables lateralmente en cualquier punto, que satisfagan $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$. La demostración es muy similar a la efectuada para la serie de Fourier. Las ecuaciones (IV.2.4)–(IV.2.5) implican

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}dk]f(x')dx',$$

de modo que lo que debe demostrarse es que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')}dk \quad = \quad \delta(x-x'), \qquad \text{(IV.2.6)}$$

donde $\int_{-\infty}^{\infty} dk = \lim\limits_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} dk$. En efecto, $\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} e^{ikt}dk = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{irt}-e^{-irt}}{it} = \frac{1}{\pi}\frac{\sin(rt)}{t}$, con

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(rt)}{t}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(u)}{u}du = 1.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}[\frac{1}{2\pi}\int_{-r}^{r} e^{ik(x-x')}dk]f(x')dx' &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin[r(x-x')]}{\pi(x-x')}f(x')dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(rt)}{\pi t}[f(x+t)-f(x)+f(x)]dt \\
&= f(x) + \int_{-\infty}^{\infty}\sin(rt)\frac{f(x+t)-f(x)}{\pi t}dt. \qquad \text{(IV.2.7)}
\end{aligned}$$

Para $r \to \infty$, el segundo término en (IV.2.7) se anula por el Lema de Riemann (véase (IV.1.2)) si f es una función derivable, al menos lateralmente, en x (ya que, en estas condiciones, $(f(x+t)-f(x))/t$ permanece acotado para $t \to 0$) e integrable en $(-\infty, \infty)$. Queda así demostrada la ecuación (IV.2.6). Obviamente, la composición de transformada y antitransformada en el orden inverso conduce también a la identidad.

La ecuación (IV.2.6) implica también

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{k'}^*(x)\phi_k(x)dx \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix(k-k')}dx = \delta(k-k'), \qquad \text{(IV.2.8)}$$

indicando que las funciones $\phi_k(x) = e^{ikx}/\sqrt{2\pi}$ son *ortogonales* respecto del producto interno $(u,v) = \int_{-\infty}^{\infty} u^*(x)v(x)dx$ y están “normalizadas” respecto de la variable k, si interpretamos por esto último precisamente la condición (IV.2.8).

Nótese que la convergencia de las integrales (IV.2.6)–(IV.2.8) debe entenderse en el sentido de las distribuciones (convergencia débil).

IV.2.2. Propiedades básicas de la transformada de Fourier

Se resumen en la siguiente tabla:

	$f(x)$	$F(k)$
0	$f(-x)$	$F(-k)$
1	$f(ax)$ $(a \neq 0)$	$F(k/a)/\|a\|$
2	$f(x+b)$	$e^{ikb}F(k)$
3	$f'(x)$	$ikF(k)$
4	$f^{(n)}(x)$	$(ik)^n F(k)$
5	$x^n f(x)$ $(n \in N)$	$i^n F^{(n)}(k)$
6	$F(x)$	$f(-k)$
7	$f(x)e^{ibx}$ $(b \in \Re)$	$F(k-b)$
8	$(f * g)(x)$	$\sqrt{2\pi}F(k)G(k)$
9	$f(x)g(x)$	$(F * G)(k)/\sqrt{2\pi}$

donde $(f * g)$ denota la *convolución* de f y g:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-x')g(x')dx' = (g * f)(x)$$

y $(F * G)(k) = \int_{-\infty}^{\infty} F(k-k')G(k')dk' = (G * F)(k)$, la convolución de F y G.

Demostraciones:

Propiedades 1–3:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}dx = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{e^{-iku/a}}{\sqrt{2\pi}}du = \frac{F(k/a)}{|a|}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+b)\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\frac{e^{-iku}}{\sqrt{2\pi}}e^{ikb}du = e^{ikb}F(k).$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}dx = f(x)\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + ik\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}dx = ikF(k),$$

donde hemos supuesto que $f'(x) \to 0$ para $x \to \pm\infty$.

La propiedad 4 resulta por inducción (suponiendo que $f^{(m)}(\pm\infty) = 0$ si $m \leq n$) y la 5 se obtiene en forma similar (suponiendo $F^{(m)}(\pm\infty) = 0$ para $m \leq n$).

La propiedad 6 es consecuencia de las ecuaciones (IV.2.4)–(IV.2.5).

Propiedad 8:

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f * g)(x)\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-x')g(x')\frac{e^{-ik(x-x'+x')}}{\sqrt{2\pi}}dx'dx =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iku}du \int_{-\infty}^{\infty} g(x')\frac{e^{-ikx'}}{\sqrt{2\pi}}dx' = \sqrt{2\pi}F(k)G(k). \qquad \text{(IV.2.9)}$$

Problema sugerido IV.2.1: Demostrar las propiedades 7 y 9.

IV.2.3. Otras propiedades de la Transformada de Fourier

Propiedad 10
La TF conserva el producto escalar entre funciones (producto interno complejo):

$$\begin{aligned}(g,f) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}F(k)dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{ikx}dxF(k)dk = \int_{-\infty}^{\infty} G^*(k)F(k)dk = (G,F),\end{aligned}$$

donde G es la TF de g. Esto implica, en particular, que la TF *conserva la norma*:

$$||f||^2 \equiv (f,f) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk = (F,F).$$

Propiedad 11
Si f es real $\Rightarrow F(-k) = F(k)^*$ (para k real). Se deduce inmediatamente de la expresión

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(kx)dx - i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(kx)dx]. \quad \text{(IV.2.10)}$$

Propiedad 12
La propiedad 0 implica que, si f es par ($f(-x) = f(x)$), $\Rightarrow F(k)$ es par $(F(-k) = F(k))$.
A partir de (IV.2.10) vemos también que, en este caso, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(kx)dx = 0$ y

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(kx)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\cos(kx)dx,$$

siendo F *real* si f es real.

Si f es impar ($f(-x) = -f(x)$) $\Rightarrow F(k)$ es impar. Entonces, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(kx)dx = 0$ y

$$F(k) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(kx)dx = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty} f(x)\sin(kx)dx,$$

siendo F *imaginario* si f es real.
Propiedad 13
A partir de la definición (IV.2.5) y la propiedad 5 se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \sqrt{2\pi}F(0), \quad \text{(IV.2.11)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)x^n dx = \sqrt{2\pi}i^n F^{(n)}(0), \quad \text{(IV.2.12)}$$

donde $n = 0, 1, 2, \ldots$. Las derivadas de $F(k)$ en el origen permiten, pues, evaluar en forma inmediata las integrales (IV.2.11)–(IV.2.12).

IV.2.4. Algunas transformadas de Fourier útiles

($H(x)$ denota la función de Heaviside, $a>0$ y b real)

	$f(x)$	$F(k)$
1	$e^{-a\|x\|}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+k^2}$
2	$e^{-ax}H(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a+ik}$
3	$e^{-x^2/(2a^2)}$	$ae^{-a^2k^2/2}$
4	$\frac{1}{x^2+a^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2a^2}}e^{-a\|k\|}$
5	$H(x+a)-H(x-a)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin(ak)}{k}$
6	$\delta(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
7	e^{ibx}	$\sqrt{2\pi}\delta(k-b)$
8	$\cos(bx)$	$\sqrt{2\pi}\,\frac{\delta(k-b)+\delta(k+b)}{2}$
9	$\sin(bx)$	$\sqrt{2\pi}\,\frac{\delta(k-b)-\delta(k+b)}{2i}$
10	$e^{-x^2/(2a^2)}e^{ibx}$	$ae^{-a^2(k-b)^2/2}$

Demostraciones:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|-ikx}dx &= \int_0^{\infty} e^{-x(a+ik)}dx+\int_{-\infty}^{0} e^{x(a-ik)}dx\\ &= \frac{1}{a+ik}+\frac{1}{a-ik}=\frac{2a}{a^2+k^2},\quad a>0\,.\end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax}H(x)e^{-ikx}dx=\int_0^{\infty} e^{-x(a+ik)}dx=\frac{1}{a+ik}\,. \qquad \text{(IV.2.13)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2-ikx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ik)^2/2-k^2/2}dx=e^{-k^2/2}\int_{-\infty+ik}^{\infty+ik} e^{-z^2/2}dz=\sqrt{2\pi}e^{-k^2/2}\,,$$

donde $z=(x+ik)$. Aquí, hemos completado cuadrados en el exponente y utilizado el resultado

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx=\sqrt{2\pi},$$

el cual se obtiene de

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy=2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2/2}rdr=2\pi\int_0^{\infty} e^{-u}du=2\pi.$$

También hemos utilizado el hecho de que $e^{-z^2/2}$ es una función analítica de z que se anula para $\mathrm{Re}[z]\to\pm\infty$. El resultado general 3 (para $a\neq 1$) se obtiene utilizando la propiedad 2.

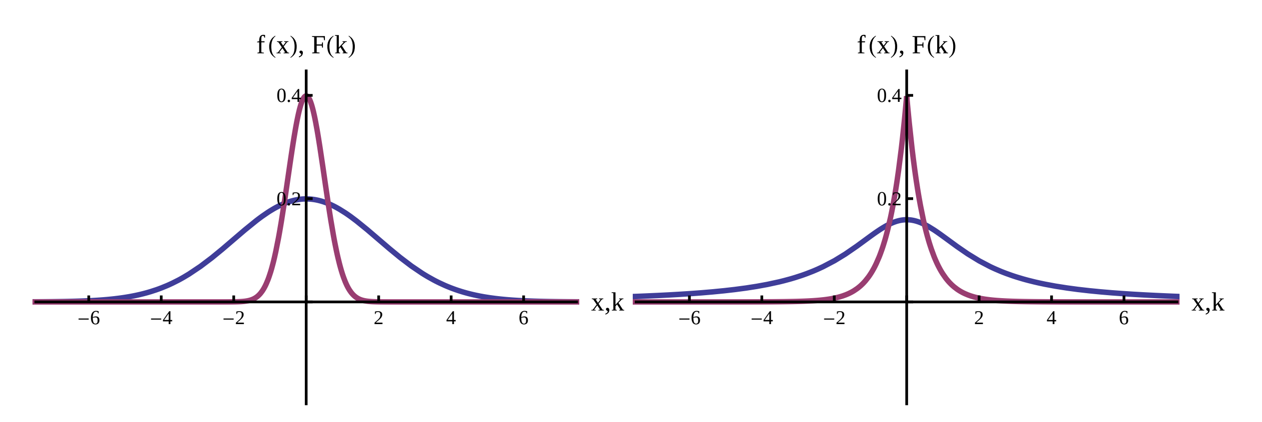


Figura 24: Izquierda: Gráfico de $f(x) = \frac{e^{-x^2/8}}{\sqrt{8\pi}}$ (azul) y su transformada de Fourier $F(k) = \frac{e^{-2k^2}}{\sqrt{2\pi}}$. Derecha: Gráfico de $f(x) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{x^2+4}$ (azul) y su transformada de Fourier $F(k) = \frac{e^{-2|k|}}{\sqrt{2\pi}}$.

Este ejemplo demuestra que la TF de una gaussiana (de ancho a) es también una gaussiana (de ancho $1/a$). Esto posee una importancia fundamental en diversas aplicaciones. Notemos que la normalización se conserva:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a^2} dx = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2} dk = \sqrt{\pi} a.$$

El ejemplo 4 de la tabla se obtiene del 1 utilizando la propiedad 6, mientras que el ejemplo 5 resulta de

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H(x+a) - H(x-a)] e^{-ikx} dx = \int_{-a}^{a} e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ika} - e^{ika}}{-ik} = 2\frac{\sin(ka)}{k}.$$

Los ejemplos 6 y 7, que deben entenderse como la TF de una distribución (siendo el resultado otra distribución), son consecuencia inmediata de (IV.2.6). El resultado 6 puede también obtenerse de 5 dividiendo a f y F por $2a$ y tomando el límite $a \to 0$, de acuerdo con la relación $\delta(x) = H'(x)$.

Los ejemplos 8-9 se derivan de lo anterior en forma inmediata, recordando que $\cos(ax) = \frac{e^{iax}+e^{-iax}}{2}$, $\sin(ax) = \frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}$. Implican que la TF de una función $f(x)$ periódica de período $2L$ (que puede desarrollarse en serie de Fourier) presenta picos tipo δ localizados en $\pm n\omega$, con $\omega = \pi/L$ y n entero. De 10 se puede reobtener 7 en el límite $a \to +\infty$.

Es importante destacar que, cuanto más esparcida esté $f(x)$ (por ejemplo, a grande en el ejemplo 3), tanto más concentrada estará $F(k)$, y viceversa, debido a la propiedad 1 de la primera tabla de propiedades. Los ejemplos 6 y 7 son casos extremos de esta propiedad, la cual está estrechamente relacionada con el principio de incerteza de la Mecánica Cuántica.

Problema sugerido IV.2.2: Obtener el resultado 10 de la tabla anterior a partir de 3.

IV.2.5. Desarrollos de medio rango: Transformadas seno y coseno

Análogamente a lo que hicimos en el caso de la serie de Fourier, para un intervalo $(0,\infty)$ podemos considerar las extensiones par e impar de una cierta función f definida para $x \geq 0$. Si completamos a f en forma par para $x < 0$, obtenemos, teniendo en cuenta la propiedad 10,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(k)\cos(kx)dk, \tag{IV.2.14}$$

$$F_c(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos(kx)dx. \tag{IV.2.15}$$

La ecuación (IV.2.15) se denomina transformada coseno de $f(x)$ y coincide con la TF de f completada en forma par. La transformada inversa tiene, en este caso, una expresión idéntica a la de la TF.

Si se completa a f en forma impar para $x < 0$, se obtiene, utilizando nuevamente la propiedad 10,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(k)\sin(kx)dk, \tag{IV.2.16}$$

$$F_s(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\sin(kx)dx. \tag{IV.2.17}$$

La ecuación (IV.2.17) se denomina transformada seno de f, y satisface $F_s(k) = iF(k)$, donde $F(k)$ es la TF de f completada en forma impar.

IV.2.6. Transformada de Fourier discreta

Consideremos, en lugar de una función $f : \Re \to \Re$, una función definida sólo en un número *finito* n de puntos x_j, $j = 0,\ldots,n-1$, tal que $f_j = f(x_j)$. En este caso es posible definir una **transformada de Fourier discreta** F_k de la siguiente forma:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=0}^{n-1} f_j\, e^{-2\pi i\, j\, k/n}, \quad k = 0,\ldots,n-1. \tag{IV.2.18}$$

Conocidos los n valores F_k, los n valores f_j pueden recuperarse exactamente mediante la transformación inversa, dada por

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1} F_k\, e^{2\pi i\, j\, k/n}, \quad j = 0,\ldots,n-1. \tag{IV.2.19}$$

Esto puede demostrarse fácilmente, reemplazando F_k por su definición:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j'=0}^{n-1} f_{j'}e^{-2\pi i j' k/n}]e^{2\pi i jk/n} = \sum_{j'=0}^{n-1} f_{j'}[\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k(j-j')/n}] = f_j\,,$$

donde hemos utilizado el resultado

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi ik(j-j')/n} = \delta_{jj'} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & j=j' \\ 0 & j\neq j' \end{array} \right. , \qquad \text{(IV.2.20)}$$

válido para j, j' *enteros*. En efecto, si $j=j'$, $e^{2\pi ik(j-j')/n}=1$ y $\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi ik(j-j')/n}=n$, mientras que, si $j\neq j'$ (y $|j-j'|<n$),

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2\pi ik(j-j')/n} = \frac{1-e^{2\pi i(j-j')}}{1-e^{2\pi i(j-j')/n}} = 0$$

para $j-j'$ entero.

Dado que $e^{i2\pi 0k/n}=e^{i2\pi nk/n}=1$, es posible definir $f_n=f_0$, $F_n=F_0$, y así evaluar las sumas para $j=1,\ldots,n$ (en lugar de $j=0,\ldots,n-1$), sin alterar los resultados finales previos. También es posible definir $f_{-j}=f_{n-j}$, $F_{-k}=F_{n-k}$, ya que $e^{-i2\pi kj/n} = e^{i2\pi k(n-j)/n}$ si j y k son enteros (extensión cíclica de f_j y F_k).

Podemos ver, también, que la transformada discreta de Fourier así definida es una transformación *unitaria*, ya que conserva el producto escalar estándar:

$$(f,g) = \sum_{j=1}^{n} f_j^* g_j = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} F_k^* e^{-i2\pi jk/n} g_j = \sum_{k=1}^{n} F_k^* G_k = (F,G) \qquad \text{(IV.2.21)}$$

En particular, $|f|^2=\sum_{j=1}^{n}|f_j|^2=\sum_{k=1}^{n}|F_k|^2=|F|^2$.

Problema sugerido IV.2.3:

a) Probar que, si f_j es constante ($f_j=c\ \forall\ j$), $\Rightarrow F_k=\delta_{k0}c\sqrt{n}$ (o sea, $F_k=0$ salvo para $k=0$).

b) Probar que, si $f_j=ce^{i2\pi mj/n}$, con $0\leq m\leq n-1 \Rightarrow F_k=c\delta_{km}\sqrt{n}$.

c) Probar que, si $f_j=c\delta_{jm}$ ($f_j=0$ salvo para $j=m$, con m entre 0 y $n-1$) $\Rightarrow$

$F_k=ce^{-2\pi imk/n}/\sqrt{n}$, $k=0,\ldots,n-1$ (o sea, $|F_k|=|c|/\sqrt{n}\ \forall\ k$).

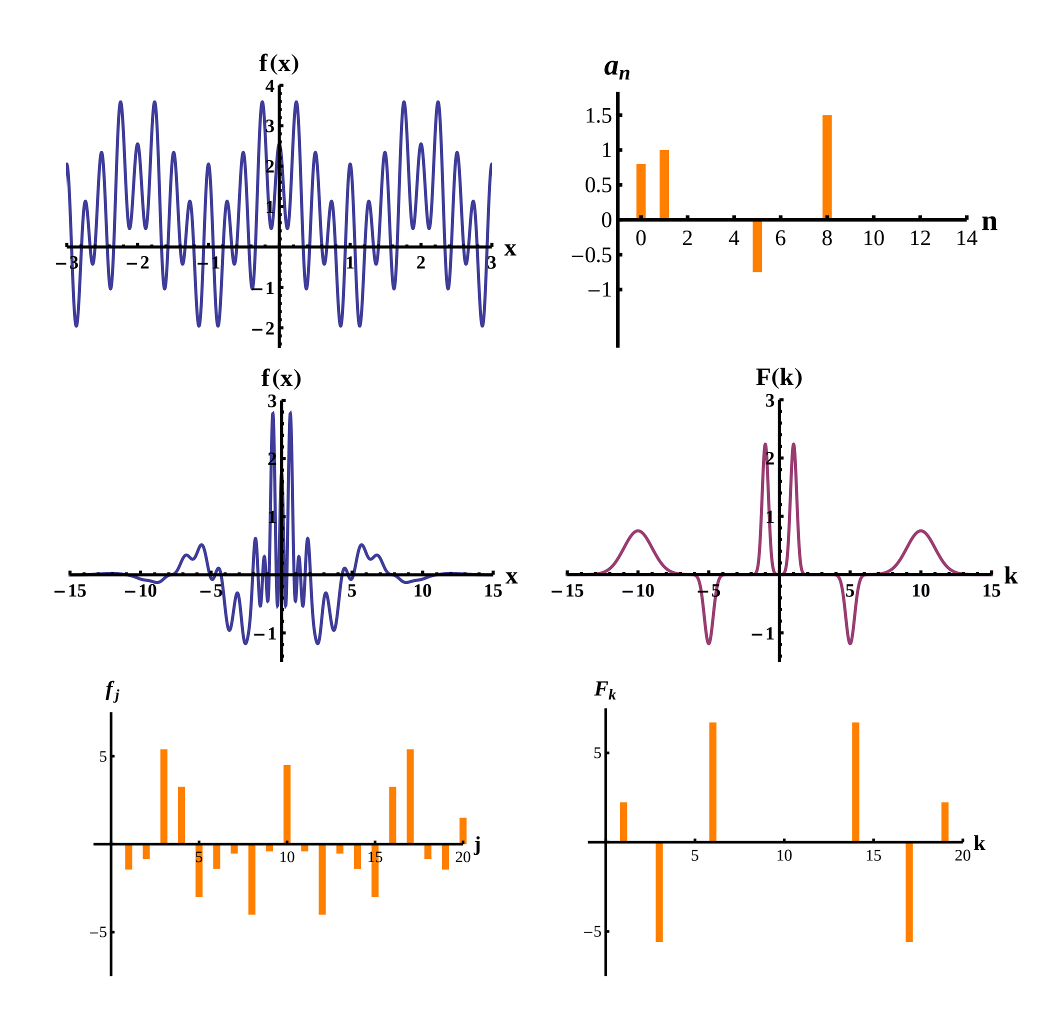


Figura 25: Reconstrucción de una función a partir de su transformada. **Arriba:** Gráfico de una función par periódica $f(x)$ de período 2 (izquierda) y sus coeficientes de Fourier a_n (derecha) ($b_n = 0 \; \forall \; n$). Estos permiten reconocer que $f(x)$ no es más que la suma de una constante a_0 más tres términos de la forma $a_n \cos(n\pi x)$, con $n = 1, 5$ y 8. **Centro:** Gráfico de una función par no periódica $f(x)$ y su transformada de Fourier $F(k)$. Ésta permite reconocer, a partir del resultado 10 de la tabla en (IV.2.4) y dado que los picos de $F(k)$ son aprox. gaussianos, que $f(x)$ está determinada esencialmente por tres frecuencias $k_1 = 1$, $k_2 = 5$, $k_3 = 10$, moduladas por gaussianas, tal que $f(x) \approx \sum_{i=1}^{3} c_i e^{-x^2/(2\alpha_i^2)} \cos(k_i x)$. **Abajo:** Una función discreta $f(j) = f_j$ definida para $j = 1, \ldots, 20$, y su transformada de Fourier discreta F_k. Ésta permite reconocer que f_j no es más que la suma de tres términos de la forma $\alpha_k \cos(2\pi k j/20)$, con $k = 1$, 3 y 6.

Problema sugerido IV.2.4: Derivar las expresiones aproximadas anteriores para $f(x)$ o f_j a partir del gráfico de a_n, $F(k)$ y F_k, y dar el valor aproximado de los parámetros intervinientes.

IV.3. Transformada de Laplace

Dada una función $f(x)$ definida para $x \geq 0$, la transformada de Laplace (TL) se define como

$$L_f(p) = \int_0^\infty e^{-px} f(x) dx. \qquad \text{(IV.3.1)}$$

Si $f(x) < e^{\alpha x}$ para $x \to \infty \Rightarrow L_f(p)$ converge para $\text{Re}[p] > \alpha$. Supondremos esta condición en lo sucesivo. Notemos que $L_f(ik) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(F_c(k) - iF_s(k))$ en el caso en que $L_f(ik)$ existe. Si completamos a f de modo tal que $f(x) = 0$ para $x < 0$, $L_f(ik) = \sqrt{2\pi}F(k)$.

La propiedad fundamental de (IV.3.1) es que las Transformadas de Laplace (TL) de las derivadas $f^{(n)}(x)$ quedan expresadas en términos de $L_f(p)$ y las derivadas de f en el punto inicial $x = 0$. En efecto, integrando por partes,

$$\begin{aligned} L_{f'}(p) &= \int_0^\infty e^{-px} f'(x) dx = -f(0) + p \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx \\ &= -f(0) + pL_f(p). \end{aligned} \qquad \text{(IV.3.2)}$$

Por inducción obtenemos, en forma análoga,

$$\begin{aligned} L_{f^{(n)}}(p) &= \int_0^\infty e^{-px} f^{(n)}(x) dx = -f^{(n-1)}(0) + p \int_0^\infty e^{-px} f^{(n-1)}(x) dx \\ &= -f^{(n-1)}(0) - pf^{(n-2)}(0) - \ldots - p^{n-1} f(0) + p^n L_f(p)\,. \end{aligned} \qquad \text{(IV.3.3)}$$

La propiedad que acabamos de demostrar hace que la TL resulte muy práctica a la hora de resolver problemas con dadas condiciones iniciales, como veremos en el problema guiado al final de esta sección.

Otra propiedad útil se refiere a la TL de la convolución de funciones f y g definidas para argumentos positivos,

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x - x') g(x') dx' = (g * f)(x).$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} L_{f*g}(p) &= \int_0^\infty \int_0^x f(x - x') g(x') e^{-px} dx' dx = \\ &= \int_0^\infty \int_0^x f(x - x') e^{-p(x-x')} g(x') e^{-px'} dx' dx \\ &= \int_0^\infty f(u) e^{-pu} du \int_0^\infty g(x') e^{-px'} dx' \\ &= L_f(p) L_g(p). \end{aligned} \qquad \text{(IV.3.4)}$$

Para hallar la transformada inversa, completando a f en forma nula para $x < 0$, y considerando la TF de $e^{-\alpha x}f(x)$, con $\alpha > 0$, podemos escribir

$$e^{-\alpha x}f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk \int_{0}^{\infty} e^{-ikx'}e^{-\alpha x'}f(x')dx',$$

de donde

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x(\alpha+ik)}dk \int_{0}^{\infty} e^{-x'(\alpha+ik)}f(x')dx' \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{zx}L_f(z)dz, \end{aligned} \qquad \text{(IV.3.5)}$$

con $z = \alpha + ik$. El resultado es, en principio, independiente de la elección de α si las integrales convergen, es decir, si α es suficientemente grande. Si es posible cerrar la integral (IV.3.5) con un semicírculo de radio muy grande a la izquierda de α, a lo largo del cual la integral tiende a cero, por el teorema de los residuos obtenemos

$$f(x) = \sum_{z_i} \mathrm{Res}[e^{z_i x}L_f(z_i)]\,,$$

donde la suma se extiende sobre *todos* los polos z_i de $e^{zx}L_f(z)$.

El mayor inconveniente de la TL es que la relación inversa requiere el conocimiento de $L_f(p)$ para valores complejos de p. Si, como ocurre en algunos problemas prácticos, se dispone tan sólo de una tabla de valores numéricos de $L_f(p)$ para cierto conjunto finito de valores reales de p (y no de una expresión analítica de $L_f(p)$) no es posible recuperar $f(x)$ con gran precisión (es un típico problema "ill posed" o mal definido).

Algunas propiedades y ejemplos (en todos los casos $a > 0$):

	$f(x)$	$L_f(p)$
1	$f(ax)$	$L_f(p/a)/a$
2	$f(x+a)$	$e^{pa}L_f(p)$
3	$f'(x)$	$-f(0) + pL_f(p)$
4	$xf(x)$	$-d[L_f(p)]/dp$
5	$(f * g)(x)$	$L_f(p)L_g(p)$
6	e^{-ax}	$\frac{1}{a+p}$
7	$\cos(ax)$	$p/(a^2+p^2)$
8	$\sin(ax)$	$a/(a^2+p^2)$
9	$H(x-a)$	e^{-ap}/p
10	$\delta(x-a)$	e^{-pa}

Problema guiado IV.3.1: Hallar $u(t)$ tal que

$$u'' + k^2 u = f(t)$$

para $t > 0$, con $u(0)$, $u'(0)$ datos conocidos y $k \neq 0$.

Multiplicando la ecuación anterior por e^{-pt} e integrando, obtenemos, utilizando la ecuación (IV.3.3),

$$-u'(0) - pu(0) + (p^2 + k^2)L_u(p) = L_f(p),$$

de donde

$$L_u(p) = \frac{u'(0) + pu(0)}{p^2 + k^2} + \frac{1}{p^2 + k^2} L_f(p).$$

Utilizando, ahora, las propiedades 5, 7 y 8 de la tabla anterior, obtenemos

$$u(t) = \frac{1}{k} u'(0) \sin(kt) + u(0) \cos(kt) + \frac{1}{k} \int_0^t \sin[k(t - t')] f(t') dt',$$

que coincide con el conocido resultado para la solución de esta ecuación, obtenido mediante la función de Green.

Capítulo V

Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

V.1. Introducción y definiciones

En Física, el estudio de sistemas con número finito de grados de libertad conduce, en general, a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias. En cambio, el estudio de medios continuos requiere la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (ver capítulo VI). Ya hemos dado, en la sección I.1 la definición general de una ecuación diferencial en derivadas parciales y de su orden. En particular, empezaremos por analizar las ecuaciones diferenciales con dos variables independientes.

Definición V.1.1 *Se llama ecuación diferencial en derivadas parciales con dos variables independientes a una relación de la forma*

$$F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \cdots,\right) = 0,$$

donde los puntos suspensivos indican posibles dependencias en derivadas de orden superior al segundo. En este libro vamos a restringirnos al estudio de las ecuaciones de segundo orden. Este es el caso de mayor utilidad en las aplicaciones a la Física y, además, permite ilustrar las ideas más importantes a tener en cuenta en el caso de ecuaciones de mayor orden.

Definición V.1.2 *La ecuación anterior se llama lineal si F lo es con respecto a $u(x,y)$ y a todas sus derivadas, es decir, si la ecuación toma la forma*

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0\,,$$

donde los coeficientes a, b, c, d, e, f, g son, en general, funciones de x e y. Si todos estos coeficientes son independientes de ambas variables, la ecuación se llama ecuación lineal a coeficientes constantes. Si $g(x,y) = 0$, se llama ecuación lineal homogénea.

Es inmediato demostrar que, como en el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias, las soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea constituyen un espacio vectorial (equivalentemente, vale el principio de superposición). Como veremos en un ejemplo simple a continuación, se trata de un espacio vectorial de dimensión infinita.

La generalización de estas definiciones a casos con más variables independientes y/u órdenes superiores es evidente.

Consideremos, primero, la ecuación lineal de primer orden más simple,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0\,,$$

donde $u(x,y)$ es una función de dos variables. Es obvio que la solución general de esta ecuación es

$$u(x,y) = f(x)\,,$$

donde f es una función arbitraria que depende sólo de x. Así, mientras que el conjunto de soluciones de una ecuación diferencial lineal ordinaria homogénea de primer orden depende de una constante arbitraria, formando un espacio vectorial de dimensión 1, en el presente caso la solución general depende de una función arbitraria f de la variable x siendo, por lo tanto, un espacio vectorial de dimensión infinita. La segunda observación es que la solución permanece constante a lo largo de una familia de curvas (en este caso, las rectas verticales $x = c$). Tales curvas se denominan curvas características.

Consideremos, ahora, la ecuación

$$a_x \frac{\partial u}{\partial x} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0\,, \tag{V.1.1}$$

con $a_x^2 + a_y^2 \neq 0$. Podemos reescribirla como $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nabla} u = 0$, con $\boldsymbol{\nabla}$ el operador gradiente y $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$, de modo que toda función que varíe sólo a lo largo de una dirección perpendicular a $\boldsymbol{a}$ (es decir, que dependa de la coordenada "perpendicular") será solución. Si, por ejemplo, $a_y \neq 0$, con a_x y a_y constantes, la solución general de (V.1.1) puede escribirse como

$$u(x, y) = f(x - \tfrac{a_x}{a_y} y),$$

con f derivable, como es fácil verificar: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{\nabla} u = (a_x - a_y \frac{a_x}{a_y}) f'(x - \frac{a_x}{a_y} y) = 0$. En este caso, la solución es constante a lo largo de las rectas $x - \frac{a_x}{a_y} y = c$, o sea, $y = c' + \frac{a_y}{a_x} x$, que son paralelas al vector $\boldsymbol{a}$. Esta familia de rectas se conoce como familia de *rectas características*.

Podemos obtener este resultado en forma más sistemática. Notemos primero que, si se efectúa un cambio de variables $(x, y) \to (x', y')$, con

$$x' = F(x, y)\,, \quad y' = G(x, y)\,,$$

siendo la transformación invertible, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= F_x \frac{\partial}{\partial x'} + G_x \frac{\partial}{\partial y'} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= F_y \frac{\partial}{\partial x'} + G_y \frac{\partial}{\partial y'}\,, \end{aligned}$$

donde el subíndice indica derivada parcial respecto de la variable respectiva.

Esto puede escribirse en forma matricial como

$$D = W D'$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} F_x & G_x \\ F_y & G_y \end{pmatrix}, \quad D' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial y'} \end{pmatrix},$$

con $\mathrm{Det}[W] \neq 0$.

La ecuación (V.1.1) puede escribirse en forma matricial como $(a_x, a_y)Du = 0$. Planteando la transformación lineal

$$x' = x + \alpha y,\ y' = x + \beta y\,,\quad \alpha \neq \beta \tag{V.1.2}$$

se obtiene $D = WD'$, con

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \tag{V.1.3}$$

y la ecuación (V.1.1) se transforma en $(a'_x, a'_y)D'u = 0$, o sea,

$$a'_x \frac{\partial u}{\partial x'} + a'_y \frac{\partial u}{\partial y'} = 0\,,$$

con

$$(a'_x, a'_y) = (a_x, a_y)W = (a_x + \alpha a_y, a_x + \beta a_y)\,.$$

Anulando, por ejemplo, a'_x, tenemos $a_x + \alpha a_y = 0$. Por lo tanto, $\alpha = -a_x/a_y$. Eligiendo $\beta \neq \alpha$, se obtiene $a'_y \neq 0$ y la ecuación se transforma, finalmente, en

$$\frac{\partial u}{\partial y'} = 0\,,$$

cuya solución es

$$u = f(x') = f(x - \frac{a_x}{a_y} y)\,.$$

Hemos supuesto a_x y a_y constantes. Notar que, sobre cualquier recta característica, la solución de nuestra ecuación diferencial permanece constante. En un caso más general, si a_x y a_y son funciones de (x, y), podemos emplear un procedimiento similar, pero utilizando una transformación general que cumpla, por ejemplo, con la condición $a'_x = a_x F_x + a_y F_y = 0$ y $a'_y \neq 0$. La curva característica será entonces, $x' = F(x, y) = c$.

V.2. Clasificación de ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

V.2.1. Ecuaciones en dos variables

Como hemos dicho, muchos problemas relacionados con medios continuos conducen a ecuaciones en derivadas parciales. Con particular frecuencia aparece la necesidad de resolver ecuaciones de segundo orden. Aunque a menudo no se trata de problemas lineales, es frecuente realizar suposiciones que los convierten en tales. En lo que sigue, discutiremos en detalle la clasificación de las ecuaciones lineales de segundo orden en dos variables independientes con coeficientes constantes y generalizaremos al caso, siempre

de segundo orden, con más variables independientes. El tratamiento del caso de coeficientes variables puede encontrarse en [8]. Para comenzar tendremos, entonces:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0\,, \qquad \text{(V.2.1)}$$

con todos los coeficientes reales y constantes. Resulta natural preguntarse si es posible, en general, hacer un cambio de variables no singular (invertible) que reduzca la ecuación anterior a una forma equivalente más simple, en el sentido de eliminar términos en derivadas segundas, en forma similar al mecanismo que permite llevar formas cuadráticas a su forma canónica.

La clasificación de las ecuaciones de este tipo depende del comportamiento de los términos que contienen derivadas segundas. Empecemos, entonces, por considerar la ecuación de segundo orden

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,. \qquad \text{(V.2.2)}$$

Si $a = c = 0$ y $b \neq 0$, se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0\,,$$

o sea, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial y}) = 0$. Entonces, $\frac{\partial u}{\partial y} = h(y)$, de donde se obtiene la solución general

$$u(x, y) = f(x) + g(y)\,,$$

con f y g funciones derivables arbitrarias, cada una de una de las dos variables. La solución general se expresa, entonces, en términos de *dos* funciones arbitrarias, cada una constante a lo largo de una curva característica.

Volviendo al caso general, para a, b y c constantes la ecuación (V.2.2) puede escribirse en forma matricial como

$$D^t A D u = 0\,, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\,,$$

con $D^t = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$. Supondremos, sin perder generalidad, que $c \neq 0$. Efectuando la transformación lineal (V.1.2), obtenemos, en términos de las nuevas variables, la ecuación $D'^t A' D' u = 0$:

$$a'\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + 2b'\frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} + c'\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = 0\,,$$

con

$$A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = W^t A W$$

y W dado por (V.1.3), es decir,

$$a' = a + 2b\alpha + c\alpha^2,\ b' = a + b(\alpha + \beta) + c\alpha\beta, c' = a + 2b\beta + c\beta^2\,.$$

Podemos anular, ahora, tanto a' como c' si elegimos α y β como las dos raíces de la ecuación $a + 2bx + cx^2 = 0$:

$$\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{c} \,.$$

Si $b^2 - ac \neq 0$ (o sea, $\mathrm{Det}[A] \neq 0$), $\alpha \neq \beta$ y, en tal caso,

$$b' = 2(a - b^2/c) \neq 0 \,.$$

La ecuación se reduce, entonces, a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x' \partial y'} = 0 \,,$$

cuya solución general es

$$u(x, y) = f(x') + g(y') \,.$$

Las rectas reales que integran las familias $x' = x + \alpha y = c_1$, con c_1 constante, e $y' = x + \beta y = c_2$, con c_2 constante (cuando existen) se denominan rectas características. Notemos que, por ejemplo, sobre la primera de estas familias, se tiene:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} dx + \frac{\partial x'}{\partial y} dy = dx + \alpha dy = 0$$

y, por ende, las rectas que integran esta familia tienen pendiente $-\alpha^{-1}$. Para la segunda familia vale un comentario similar: su pendiente es $-\beta^{-1}$.

Veremos a continuación cómo se clasifican las ecuaciones lineales y homogéneas del tipo (V.2.2), según sea $\mathrm{Det}[A]$ menor, mayor o igual a cero:

1) **Caso hiperbólico:** $b^2 - ac > 0$ ($\mathrm{Det}[A] < 0$). Las dos raíces α, β son reales y distintas. La solución general es, entonces, de la forma

$$u(x, y) = f(x + \alpha y) + g(x + \beta y)$$

y posee *dos rectas características*: $x + \alpha y = c$, y $x + \beta y = c'$, sobre las cuales f y g son respectivamente constantes. Un nuevo cambio,

$$s = x' + y', \quad t = x' - y' \,,$$

lleva la ecuación hipérbólica a la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \,.$$

El ejemplo típico de ecuación hiperbólica es la ecuación de ondas en una dimensión espacial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(V.2.3)}$$

($b = 0$, $a = 1$, $c = -1/v^2$), en cuyo caso $\frac{\alpha}{\beta} = \mp v$ y la solución general es, entonces,

$$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)\,,$$

es decir, un pulso descrito por f que se propaga hacia valores crecientes de x con velocidad v más uno descrito por g, que se propaga hacia valores decrecientes de x con la misma velocidad.

2) **Caso elíptico:** $b^2 - ac < 0$ ($\mathrm{Det}[A] > 0$). Las dos raíces son complejas conjugadas, por lo que $y' = (x')^*$. Podemos escribir entonces la solución como

$$u(x,y) = f(z) + g(z^*), \quad z = x' = x - \frac{b}{c}y + \frac{i}{c}\sqrt{ac - b^2}y\,.$$

Esto significa que la solución es una suma de una función analítica $f(z)$ (definida, por ejemplo, a través de una serie de potencias), y una función antianalítica $g(z^*)$.

Notemos, también, que mediante la transformación lineal real

$$s = \frac{x' + y'}{2} = x - \frac{b}{c}y, \quad t = \frac{x' - y'}{2i} = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{c}y$$

es posible llevar la ecuación elíptica a la forma de Laplace,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0\,. \qquad \text{(V.2.4)}$$

En efecto, la ecuación de Laplace es el paradigma de ecuación elíptica, y su solución general es

$$u(s,t) = f(s + it) + g(s - it)\,.$$

Esto está de acuerdo con el conocido resultado de que las partes real e imaginaria de una función analítica satisfacen la ecuación de Laplace. En este caso no existen rectas características reales.

3) **Caso parabólico:** $b^2 - ac = 0$ ($\mathrm{Det}[A] = 0$). Aquí existe una sola raíz, por lo que tomamos, si $b \neq 0$ (en cuyo caso $a = -b^2/c \neq 0$) $\alpha = -b/c$, $\beta = 0$. Esto conduce a $c' = a$ y $b' = a' = a - b^2/c = 0$, por lo que se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = 0\,,$$

cuya solución general es

$$\begin{aligned} u(x,y) &= f(x') + y'g(x') = f(x - \frac{b}{c}y) + xg(x - \frac{b}{c}y) \\ &= f(x - \frac{b}{c}y) + yh(x - \frac{b}{c}y)\,. \end{aligned}$$

Si $b = 0$ y $c \neq 0 \Rightarrow a = 0$ y podemos tomar $x' = x$, $y' = y$ en las expresiones anteriores. El ejemplo paradigmático es la ecuación de difusión, pero ésta contiene, además, un término de primer orden (se discutirá más adelante). Notemos que, en este caso, hay una sola recta característica: $x - \frac{b}{c}y = c$. En este sentido, puede decirse que el caso parabólico es "intermedio" entre el hiperbólico y el elíptico.

V.2.2. Simetrías

Destaquemos que la ecuación de Laplace (V.2.4), que podemos escribir como $D^tADu = 0$, con $D = (\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t})^t$ y A la matriz identidad de 2×2, es **invariante frente a rotaciones en el plano $s - t$:**

$$s' = s\cos\theta + t\sin\theta, \qquad t' = -s\sin\theta + t\cos\theta\,,$$

ya que se tiene $W = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, con $W^t = W^{-1}$ y entonces $A' = W^tAW = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esta propiedad se extiende a la ecuación de Laplace en n dimensiones.

Análogamente, la ecuación de ondas (V.2.3), que podemos escribir como $D^tADu = 0$, con $D = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})^t$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/v^2 \end{smallmatrix}\right)$, es claramente **invariante frente a boosts de Lorentz en $x - t$:**

$$x' = x\cosh\theta + vt\sinh\theta, \qquad t' = (x/v)\sinh\theta + t\cos\theta$$

ya que, en este caso, $W = \begin{pmatrix} \cosh\theta & v^{-1}\sinh\theta \\ v\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$ y $A' = W^tAW = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -v^{-2} \end{pmatrix}$.

Ambas ecuaciones son, además, obviamente invariantes frente a traslaciones $s' = s + a$, $t' = t + b$ para la ecuación de Laplace, o bien $x' = x + a$, $t' = t + b$ para la ecuación de ondas, con a y b constantes.

V.2.3. Formulación general

Como anticipamos, la clasificación de las ecuaciones de la forma (V.2.2) en hiperbólicas, elípticas y parabólicas es totalmente análoga a la clasificación de secciones cónicas o ecuaciones algebraicas cuadráticas ($(x, y)A\binom{x}{y} = 0$). En el caso que nos ocupa, la matriz real A es simétrica y, por lo tanto, es siempre diagonalizable por medio de una transformación unitaria real (ver Apéndice A): Existe W, con $W^{-1} = W^t$ tal que $A' = W^tAW$ es *diagonal*, es decir, $b' = 0$. Por lo tanto, la transformación correspondiente

$$x' = W_{11}x + W_{21}y, \;\; y' = W_{12}x + W_{22}y$$

lleva la ecuación (V.2.2) a la forma diagonal

$$a'\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + c'\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = 0\,,$$

donde a', c' son los autovalores de A, que son siempre reales:

$$\begin{matrix} a' \\ c' \end{matrix} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{(\frac{a-c}{2})^2 + b^2}\,.$$

Caso hiperbólico: Corresponde a autovalores *no nulos de signos opuestos*: $\mathrm{Det}(A) = a'c' = ac - b^2 < 0$
Caso elíptico: Corresponde a autovalores no nulos del *mismo signo*: $\mathrm{Det}(A) = a'c' > 0$.
Caso parabólico: Corresponde a un autovalor *nulo*: $\mathrm{Det}(A) = a'c' = 0$.

En el caso general de n variables, las ecuaciones de segundo orden con coeficientes reales constantes se clasifican de modo análogo. La ecuación de segundo orden

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0\,,$$

con $A_{ij} = A_{ji}$, puede escribirse en forma matricial como

$$D^t A D = 0\,,$$

con la extensión evidente de la notación anterior. La ecuación se dice de tipo elíptico si los autovalores de A son todos no nulos y del mismo signo, de tipo hiperbólico si son no nulos y todos del mismo signo excepto uno, de tipo ultrahiperbólico cuando son todos no nulos, con p de ellos de un signo y $n-p$ de signo opuesto ($p, n-p > 1$), y de tipo parabólico cuando existe al menos un autovalor nulo. Notemos que la clasificación dada sigue siendo válida, aun cuando a, b, c, d, e, f no sean constantes. En este caso, la ecuación puede cambiar de tipo en distintas regiones del plano. Por ejemplo, $y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ es elíptica cuando $y^2 - x^2 > 0$, parabólica para $x^2 = y^2$ e hiperbólica en la región $y^2 - x^2 < 0$.

Finalmente, consideremos la ecuación lineal homogénea de segundo orden en dos variables con coeficientes constantes completa:

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0\,.$$

La misma puede escribirse en forma matricial simetrizada como

$$D^t A D u + \tfrac{1}{2}(B^t D + D^t B)u + fu = 0\,,$$

con $B = \binom{d}{e}$, $B^t = (d, e)$. Si $\mathrm{Det}[A] \neq 0$ (casos hiperbólico o elíptico), podemos reescribirla en la forma

$$(D^t - C^t)A(D - C)u + f'u = 0\,,$$

donde $C = -\frac{1}{2}A^{-1}B = \binom{c_x}{c_y}$, $f' = f - C^t A C$. En estos casos, el reemplazo

$$u(x, y) = e^{c_x x + c_y y} w(x, y)$$

permite escribir $(D-C)u = e^{c_x x + c_y y} Dw$ y $(D^t - C^t) e^{c_x x + c_y y} ADw = e^{c_x x + c_y y} D^t ADw$, lo cual nos conduce a

$$D^t ADw + f' w = 0,$$

es decir, a una ecuación *sin* términos en derivadas primeras, para w. Esto no es siempre posible en el caso parabólico.

El mismo tratamiento puede aplicarse al caso de n variables independientes.

V.3. El método de separación de variables

V.3.1. Consideraciones generales

Es el método adecuado para resolver ecuaciones diferenciales lineales en derivadas parciales, cuando involucran sumas de operadores diferenciales en distintas variables y regiones geométricas de tipo rectangular (es decir, producto) en dichas variables.

Consideremos una ecuación diferencial para una función incógnita $u(x,y)$ de la forma

$$L_x(u) + L_y(u) = 0, \quad (x,y) \in \ R\,, \qquad \text{(V.3.1)}$$

donde:
I) L_x es un operador diferencial lineal que depende sólo de la variable independiente x, tal como $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ o

$$L_x = -\frac{\partial}{\partial x}(p(x)\frac{\partial}{\partial x}) + q(x)\,, \qquad \text{(V.3.2)}$$

y análogamente, L_y es un operador diferencial lineal que depende sólo de la variable independiente y, tal como $-\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, o $\frac{\partial}{\partial y}$, o también de la forma (V.3.2).
II) R es una región *producto* en las variables x, y:

$$R = R_x \times R_y\,, \qquad \text{(V.3.3)}$$

con $R_x = [a,b]$, $R_y = [c,d]$, es decir, un rectángulo

$$a \le x \le b, \ \ c \le y \le d\,, \qquad \text{(V.3.4)}$$

donde, en general, a, b, c, d pueden ser finitos o también infinitos.

El ejemplo típico de (V.3.1) es la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas para una región rectangular,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \ \ a \le x \le b, \ \ c \le y \le d\,. \qquad \text{(V.3.5)}$$

El método consiste en ensayar una solución producto de la forma

$$u(x,y) = X(x)Y(y)\,, \qquad \text{(V.3.6)}$$

donde $X(x)$ es función de x solamente e $Y(y)$ función de y solamente. Reemplazando en (V.3.1) obtenemos

$$L_x[X(x)]Y(y) + X(x)L_y[Y(y)] = 0 \tag{V.3.7}$$

y por lo tanto, asumiendo $X(x)Y(y) \neq 0$ y dividiendo por $X(x)Y(y)$,

$$\frac{L_x(X(x)]}{X(x)} + \frac{L_y[Y(y)]}{Y(y)} = 0\,, \tag{V.3.8}$$

es decir,

$$\frac{L_x(X(x)]}{X(x)} = -\frac{L_y[Y(y)]}{Y(y)}\,. \tag{V.3.9}$$

Como cada fracción depende sólo de una de las variables independientes, y queremos que la igualdad anterior se satisfaga $\forall\ (x, y) \in R$, la única posibilidad es que ambos cocientes sean *constantes*, es decir, independientes de x y de y:

$$\frac{L_x(X(x)]}{X(x)} = -\frac{L_y[Y(y)]}{Y(y)} = k\,. \tag{V.3.10}$$

Esto implica las ecuaciones

$$L_x[X(x)] = kX(x), \quad L_y[Y(y)] = -kY(y)\,, \tag{V.3.11}$$

con lo cual hemos reducido el problema original a dos ecuaciones diferenciales *ordinarias* que dependen de una constante, hasta ahora arbitraria, k. Denominando $X_k(x)$, $Y_{-k}(y)$ a las soluciones generales de las ecuaciones anteriores, obtenemos una solución producto $X_k(x)Y_{-k}(y)$ de (V.3.1).

Es importante destacar que no estamos diciendo que la solución de (V.3.1) es necesariamente un producto, sino que admite soluciones producto. Dado que la ecuación diferencial es lineal, podemos luego plantear una solución más general como combinación lineal de productos:

$$u(x, y) = \sum_k c_k X_k(x)Y_{-k}(y) \tag{V.3.12}$$

que, obviamente, no será en general un producto$f(x)g(y)$.

Los posibles valores de k quedan determinados *por las condiciones de contorno del problema*, y es aquí donde comienza a desempeñar un papel fundamental el hecho de que R sea una región producto. Por ejemplo, supongamos que requerimos una solución de (V.3.1) que satisfaga la condición de contorno

$$u(a, y) = 0, \quad u(b, y) = 0, \quad \forall\ y \in [c, d]\,. \tag{V.3.13}$$

Esto implica, para la solución producto, que $X(a) = X(b) = 0$. La primera de las ecuaciones (V.3.11) se transforma entonces *en una ecuación de autovalores para el operador* L_x, con las condiciones de contorno anteriores:

$$L_x(X) = kX, \quad X(a) = X(b) = 0\,, \tag{V.3.14}$$

de la que se buscan, obviamente, soluciones no triviales. Si L_x es de la forma (V.3.2), (V.3.14) es *la ecuación de autovalores para el operador de Sturm-Liouville* L_x con las condiciones de contorno homogéneas $X(a) = X(b) = 0$ (para las cuales L_x es autoadjunto). En general, para esta o cualquier otra condición de contorno para la cual L_x resulte un operador de Sturm-Liouville autoadjunto, sabemos que la ecuación (V.3.14) conduce a

$$k = \lambda_n^x, \quad X(x) = X_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{V.3.15}$$

donde λ_n^x denota el enésimo autovalor de L_x con la condición de contorno dada, y $X_n(x)$ la correspondiente autofunción. Una vez obtenido λ_n^x, se procede a resolver la segunda ecuación de (V.3.11),

$$L_y(Y) = -\lambda_n^x Y \tag{V.3.16}$$

la cual *no es una ecuación de autovalores*, pues λ_n^x está ya determinado. Si L_y es un operador diferencial que involucra hasta derivadas segundas, la solución $Y_n(y)$ de esta ecuación tendrá dos constantes arbitrarias. Si y representa una posición, una de ellas puede utilizarse para satisfacer una condición de contorno en otro de los bordes, tal como

$$Y(d) = 0\,,$$

(o $Y(\infty)$ acotada si $d \to \infty$), lo cual deja libre una constante c_n. De esta forma, obtenemos las soluciones producto

$$u_n(x, y) = c_n X_n(x) Y_n(y)\,,$$

y podemos plantear una solución más general de la forma

$$u(x, y) = \sum_n c_n X_n(x) Y_n(y)\,. \tag{V.3.17}$$

Las constantes c_n pueden, finalmente, obtenerse a partir de una condición de contorno no homogéna en el borde restante, tal como $u(x, c) = f(x)$, obteniéndose la condición

$$u(x, c) = \sum_n c_n X_n(x) Y_n(c) = f(x)\,. \tag{V.3.18}$$

Esta última ecuación corresponde al desarrollo en autofunciones de L_x de la función $f(x)$. Por completitud del conjunto de autofunciones, sabemos que tal desarrollo *es posible para*

cualquier $f(x)$ *que satisfaga* $f(a) = f(b) = 0$, si $Y_n(c) \neq 0 \; \forall \; n$. Por la ortogonalidad de las $X_n(x)$ ($\int_a^b X_n^*(x) X_{n'}(x)dx = N(n)\delta_{nn'}$ para L_x autodajunto), obtenemos entonces

$$c_n Y_n(c) = \frac{\int_a^b X_n^*(x) f(x) dx}{\int_a^b X_n^*(x) X_n(x) dx} \tag{V.3.19}$$

de donde se obtiene c_n. Si el problema original contenía datos no homogéneos en ambas fronteras, tal como $u(x,c) = f(x)$, $u(x,d) = h(x)$, se puede proceder en forma similar, planteando la solución como suma de aquella para $u(x,c) = f(x)$, $u(x,d) = 0$ y aquella para $u(x,c) = 0$, $u(x,d) = h(x)$, o bien determinando las dos constantes de $Y_n(y)$ simultáneamente con las anteriores condiciones. Para otras condiciones de contorno para las que L_x sea autoadjunto, se procede en forma similar, como se detalla en las secciones siguientes.

Si, en cambio, y representa una variable temporal, es decir $y \to t$, y si $L_y \equiv L_t$ involucra hasta derivadas segundas, las dos constantes arbitrarias de $Y_n(t)$ pueden determinarse a partir de las condiciones iniciales $u(x, t_0) = f(x)$, $u_t(x, t_0) = h(x)$, donde $u_t(x, t_0) = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=t_0}$, que nuevamente conducen, utilizando (V.3.17) para $y = t_0$, al desarrollo de $f(x)$ y $h(x)$ en las autofunciones de L_x (los detalles se dan en las secciones siguientes). Análogamente, si L_t contiene sólo derivadas de primer orden en t, $Y_n(t)$ contendrá una constante arbitraria, que se podrá determinar de la condición $u(x,t_0) = f(x)$.

Los resultados anteriores sugieren que el método de separación de variables es suficiente para proporcionar la solución del problema planteado bajo las condiciones previas. Esto es, efectivamente, así. Podemos arribar a este método desde otro punto de vista, planteando un desarrollo de la solución $u(x,y)$ en autofunciones $X_n(x)$ de L_x con la correspondiente condición de contorno:

$$u(x,y) = \sum_n c_n(y) X_n(x) \, , \tag{V.3.20}$$

donde, en principio, $c_n(y) = \frac{\int_a^b X_n^*(x) u(x,y) dx}{\int_a^b X_n^*(x) X_n(x) dx}$. No obstante, si (V.3.20) debe ser solución de (V.3.1) y la convergencia es uniforme, entonces, reemplazando en (V.3.1),

$$0 = \sum_n \{\lambda_n^x c_n(y) + L_y[c_n(y)]\} X_n(x) \, ,$$

lo que implica, dada la ortogonalidad de las $X_n(x)$, que $L_y[c_n(y)] = -\lambda_n^x c_n(y)$, es decir, $c_n(y) \propto Y_n(y)$. Vemos, pues, que si bien una solución producto es una solución muy particular de (V.3.1), la solución general (con condiciones de contorno que hagan a L_x un operador de Sturm-Liouville autoadjunto) puede expresarse como una suma (o serie) de soluciones producto.

Es evidente que, si las condiciones de contorno homogéneas están dadas sobre la variable y en lugar de x, con L_y autoadjunto con tales condiciones, se procede en forma similar ($y \leftrightarrow x$). Y si y representa en realidad a un conjunto de variables independientes distintas de x, se procede también en forma análoga, realizando luego una nueva separación de variables en la ecuación $L_y(Y) = -\lambda_n^x Y$, en caso de ser esto posible.

Observaciones:
1) si $L_x \to \frac{1}{\rho(x)} L_x$, con L_x un operador de Sturm Liouville y $\rho(x) > 0$ para $x \in (a,b)$, entonces la ecuación de autovalores resultante,

$$L_x(X) = k\rho(x)X(x)\,,$$

contiene una función de peso $\rho(x)$. Nada cambia formalmente en las expresiones anteriores (aunque los autovalores y autofunciones sí cambian y las condiciones de contorno deben ser las adecuadas), salvo que la ortogonalidad es ahora con peso $\rho(x)$, por lo que se debe incluir $\rho(x)$ en las integrales (V.3.19).

2) Las expresiones anteriores pueden extenderse a un intervalo R_x infinito o semi-infinito (por ejemplo, $b \to \infty$), si L_x y las condiciones de contorno son adecuadas, pero en tal caso n pasará a un índice continuo ($n \to k$), con las autofunciones satisfaciendo la ortogonalidad $\int_{x \in R_x} X_k^*(x) X_{k'}(x) dx = N(k)\delta(k-k')$. El procedimiento resulta equivalente a resolver el problema por medio de una transformación adecuada (transformada de Fourier, etc.), como se verá en las secciones siguientes.

3) Si $Y_n(c) = 0$ para algún n, el desarrollo (V.3.18) puede no ser factible para algunas $f(x)$ (las que contengan una componente no nula en la "dirección" de la $X_n(x)$ correspondiente). Pero esto no es un defecto del método de separación de variables, sino del problema planteado: En estos casos el operador $L_x + L_y$ resulta singular (posee un autovalor 0) y no existe necesariamente solución del problema planteado si $f(x)$ es general.

Los ejemplos específicos que desarrollaremos en detalle en las próximas secciones, y que son todos de la forma (V.3.1), son:
1) La ecuación de Laplace (V.3.5) en coordenadas cartesianas para una región rectangular, y su extensión a regiones producto tridimensionales o n-dimensionales.
2) La ecuación de Laplace en coordenadas polares para en un sector circular,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad a \le r \le b, \;\; 0 \le \theta \le \theta_m\,,$$

con $a \ge 0$. Si bien no es directamente de la forma (V.3.1), puede ser llevada inmediatamente a dicha forma multiplicándola por $-r^2$. Es interesante observar que, si $0 \le \theta < 2\pi$, la mera continuidad de la solución y su derivada implica condiciones de contorno periódicas en θ. Si $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$, la correspondiente ecuación $L_\theta(\Theta) = k\Theta$ es una ecuación de autovalores para $L_\theta = -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ (con condiciones de contorno periódicas), que implica $k = -\lambda_n^\theta = -n^2$, con n entero y $\Theta_n(\theta) = e^{in\theta}$. En tal caso, $L_r[R(r)] = -n^2 R(r)$ no es una ecuación de autovalores. Los detalles se darán en las secciones siguientes.
En forma similar se trata la ecuación de Laplace en un sector esférico $a < r < b$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$, $0 \le \phi \le \phi_m$.
3) La ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \;\; a \le x \le b, \;\; t \ge 0\,,$$

4) la ecuación de difusión unidimensional,

$$\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0\,.$$

Estas ecuaciones serán estudiadas en las secciones siguientes, al igual que sus extensiones a dos y tres dimensiones en geometrías tipo producto en variables cartesianas o polares.

V.3.2. Autovalores y autofunciones de $L_x + L_y$

Consideremos ahora el problema de autovalores en dos dimensiones,

$$(L_x + L_y)(u) = \lambda u, \ \ (x,y) \in R_x \times R_y\,, \qquad \text{(V.3.21)}$$

con una cierta condición de contorno en el borde que haga a $L_x + L_y$ autoadjunto, tal como

$$u(a,y) = u(b,y) = 0, \ \ u(x,c) = u(x,d) = 0\,. \qquad \text{(V.3.22)}$$

El problema típico es el de los autovalores del laplaciano en un rectángulo, $-\Delta u = \lambda u$, $(x,y) \in R_x \times R_y$, o sea,

$$-(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = \lambda u\,, \ \ (x,y) \in R_x \times R_y\,. \qquad \text{(V.3.23)}$$

Escribiendo (V.3.21) como $(L_x + L_y - \lambda)u = 0$, podemos aplicar el método de separación de variables, que conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned} L_x(X) &= kX, \ \ X(a) = X(b) = 0, & \text{(V.3.24)} \\ L_y(Y) &= (\lambda - k)Y, \ \ Y(c) = Y(d) = 0\,. & \text{(V.3.25)} \end{aligned}$$

Las ecuaciones (V.3.25) son *ambas* ecuaciones de autovalores para L_x y L_y (pues λ no está determinado), por lo que

$$\begin{aligned} k &= \lambda^x_n, \ X(x) = X_n(x), \ \ n = 1,2,3,\ldots, & \text{(V.3.26)} \\ \lambda - k &= \lambda^y_m, \ Y(y) = Y_m(y), \ \ m = 1,2,3,\ldots. & \text{(V.3.27)} \end{aligned}$$

Esto implica $\lambda = \lambda_{nm}$, con

$$\begin{aligned} \lambda_{nm} &= \lambda^x_n + \lambda^y_m\,, & \text{(V.3.28)} \\ u_{nm}(x,y) &= X_n(x)Y_m(y)\,. & \text{(V.3.29)} \end{aligned}$$

Los autovalores de $L_x + L_y$ en una región producto son, entonces, *la suma* de los autovalores de L_x y L_y, mientras que las correspondientes autofunciones son *el producto* de las autofunciones de L_x y L_y.

Puede demostrarse que *toda* autofunción de $L_x + L_y$ en una región producto es, o bien un producto de autofunciones de L_x y L_y (autofunción producto), o bien una combinacion lineal de autofunciones producto asociadas al mismo autovalor (cuando la dimensión del espacio propio es mayor que uno). Efectivamente, de existir una autofunción no producto con autovalor distinto de los correspondientes a las que sí lo son, debería ser ortogonal a toda autofunción producto, por ser las autofunciones de un operador autoadjunto ortogonales, pero toda función $u(x, y)$ en $R_x \times R_y$ que satisfaga las condiciones de contorno puede desarrollarse como suma o serie de autofunciones producto: Como $\forall\; y \in [c, d]$,

$$u(x,y) = \sum_n c_n(y)X_n(x), \quad c_n(y) = \frac{\int_a^b X_n^*(x)u(x,y)dx}{\int_a^b X_n^*(x)X_n(x)dx}\,, \tag{V.3.30}$$

y, además,

$$c_n(y) = \sum_m c_{nm}Y_m(y), \quad c_{nm} = \frac{\int_c^d Y_m^*(y)C_n(y)dy}{\int_a^b Y_m^*(y)Y_m(y)dy}\,, \tag{V.3.31}$$

entonces

$$u(x,y) = \sum_{n,m} c_{nm}X_n(x)Y_m(y),\; c_{nm} = \frac{\int_a^b\int_c^d X_n^*(x)Y_m^*(y)u(x,y)dxdy}{\int_a^b X_n^*(x)X_n(x)dx\int_c^d Y_m^*(y)Y_m(y)dy}. \tag{V.3.32}$$

Una función ortogonal a todo producto, derivable y que satisfaga las condiciones de contorno debe, por lo tanto, ser nula ($c_{nm} = 0\; \forall\; n, m$).

Por otra parte, si se tiene una autofunción no producto cuyo autovalor coincide con alguno de los autovalores asociados con las autofunciones que sí lo son, nuestro razonamiento anterior muestra que la misma (ortogonal a todas las tipo producto que corresponden a autovalores distintos al propio) debe, necesariamente, ser combinación lineal de aquéllas tipo producto con las cuales comparte autovalor y, por lo tanto, linealmente dependiente. El conjunto ortogonal de todas las autofunciones producto $u_{nm}(x, y) = X_n(x)Y_m(y)$ es, entonces, completo en $R_x \times R_y$.

Ejemplos específicos serán desarrollados en las secciones siguientes.

V.3.3. Autovalores y autofunciones de $\frac{1}{\rho(x)}L_x + g(x)L_y$

Consideremos, ahora, un problema de autovalores más general,

$$\left(\frac{1}{\rho(x)}L_x + g(x)L_y\right)(u) = \lambda u, \quad (x, y) \in R_x \times R_y\,, \tag{V.3.33}$$

donde L_x y L_y son operadores diferenciales del tipo de Sturm-Liouville en las variables x e y respectivamente.

Esta ecuación surge, por ejemplo, al considerar el problema de autovalores del laplaciano en una región circular $-\Delta u(r, \theta) = \lambda u(r, \theta)$, $(r, \theta) \in R_r \times R_\theta$. Más precisamente,

$$-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = \lambda u, \quad a \le r \le b, \quad 0 \le \theta \le \theta_m\,, \tag{V.3.34}$$

que puede escribirse en la forma (V.3.33):

$$-(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2})=\lambda u,\quad (r,\theta)\in R_r\times R_\theta\,. \qquad \text{(V.3.35)}$$

Como condiciones de contorno podemos considerar, por ejemplo, que u se anule en los bordes si $a>0$, $\theta_m<2\pi$. Si, en cambio, $\theta_m=2\pi$ (anillo o disco), deben imponerse condiciones de contorno periódicas en θ y, si $a=0$ (disco o sector de disco), debe pedirse que u permanezca acotada para $r\to 0$, como se discutió anteriormente.

Retornando a (V.3.33), por simplicidad de notación consideraremos en lo que sigue que u se anula en el borde, con $R=R_x\times R_y$ y $R_x=[a,b]$, $R_y=[c,d]$. Planteando nuevamente en (V.3.33) una solución producto $u(x,y)=X(x)Y(y)$, se obtiene

$$\frac{1}{\rho(x)}L_x[X(x)]Y(y)+g(x)X(x)L_y[Y(y)]=\lambda X(x)Y(y), \qquad \text{(V.3.36)}$$

y, por lo tanto, dividiendo por $g(x)X(x)Y(y)$,

$$\frac{1}{g(x)}\left\{\frac{1}{\rho(x)}\frac{L_x[X(x)]}{X(x)}-\lambda\right\}+\frac{L_y[Y(y)]}{Y(y)}=0\,, \qquad \text{(V.3.37)}$$

es decir,

$$\frac{L_y[Y(y)]}{Y(y)}=-\frac{1}{g(x)}\left\{\frac{1}{\rho(x)}\frac{L_x[X(x)]}{X(x)}-\lambda\right\}=k\,, \qquad \text{(V.3.38)}$$

con k *constante*. Esto conduce a las ecuaciones

$$L_y[Y(y)] \;=\; kY(y),\quad Y(c)=Y(d)=0\,, \qquad \text{(V.3.39)}$$

$$L_x[X(x)]+k\rho(x)g(x)X(x) \;=\; \lambda\rho(x)X(x)\,,\quad X(a)=X(b)=0\,. \qquad \text{(V.3.40)}$$

La primera de estas ecuaciones es una ecuación de autovalores estándar para L_y, por lo que

$$k=\lambda^y_m,\quad Y(y)=Y_m(y)\,,\quad m=1,2,3,\ldots \qquad \text{(V.3.41)}$$

con λ^y_m e $Y_m(y)$ los autovalores y autofunciones de L_y con la condición de contorno dada. La segunda ecuación la podemos ahora reescribir como

$$L^m_x[X(x)]=\lambda\rho(x)X(x)\,,\quad X(a)=X(b)=0\,, \qquad \text{(V.3.42)}$$

que es una ecuación de autovalores con peso $\rho(x)$ para el operador

$$L^m_x=L_x+\lambda^y_m g(x)\rho(x)\,, \qquad \text{(V.3.43)}$$

donde el supraíndice m indica que depende de λ^y_m. Entonces

$$\lambda=\lambda^m_n,\quad X(x)=X^m_n(x),\quad n=1,2,3\ldots \qquad \text{(V.3.44)}$$

donde λ_n^m, $X_n^m(x)$, son los autovalores y autofunciones de L_x^m, identificando m el autovalor correspondiente de L_y.

Los autovalores ya no son la suma de los autovalores de L_x y L_y, pero las autofunciones continúan siendo el producto de dos autofunciones, una de L_y y otra de L_x^m con peso $\rho(x)$:

$$[\frac{1}{\rho(x)}L_x + g(x)L_y]u_{nm} = \lambda_n^m u_{nm}\,, \quad u_{nm}(x,y) = X_n^m(x)Y_m(y)\,. \qquad \text{(V.3.45)}$$

Por ejemplo, en el caso de la ecuación (V.3.35) para $0 < \theta < 2\pi$ y $0 \leq r \leq b$, con $u(b,\theta) = 0$, la ecuación (V.3.39) resulta

$$-\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2} = k\,\Theta \qquad \text{(V.3.46)}$$

que, junto con las condiciones de contorno periódicas, implica $\Theta(\theta) \propto e^{i\nu\theta}$, con $k = \nu^2$ y ν *entero*. La ecuación (V.3.42) es, entonces,

$$-\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial R}{\partial r}) + \frac{\nu^2}{r}R = r\lambda R\,, \qquad \text{(V.3.47)}$$

que es una ecuación de autovalores para el operador de Sturm-Liouville $L_r = -\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\nu^2}{r}$ con peso r. Esta ecuación puede escribirse como

$$R'' + \frac{R'}{r} + (\lambda - \frac{\nu^2}{r^2})R = 0\,,$$

que es una ecuación de Bessel. Para $0 \leq r \leq b$, ya sabemos (ver capítulo III) que la única solución acotada de esta ecuación es proporcional a

$$R_\nu(r) = J_{|\nu|}(\sqrt{\lambda}r)\,, \qquad \text{(V.3.48)}$$

con J_ν la función de Bessel de primera especie. La condición de contorno $R(b) = 0$ implica entonces $\sqrt{\lambda} = k_n^\nu/b$, con k_n^ν el m-ésimo 0 de la función de Bessel J_ν, $\nu > 0$ ($J_\nu(k_n^\nu) = 0$). Por lo tanto, los autovalores y autofunciones del laplaciano en la región $0 \leq r \leq b$, $0 \leq \theta < 2\pi$, son

$$\lambda_n^\nu = (k_n^\nu)^2/b^2, \quad u_{n\nu}(r,\theta) = J_{|\nu|}(k_n^\nu r/b)e^{i\nu\theta}\,, \qquad \text{(V.3.49)}$$

existiendo dos autofunciones linealmente independientes por cada autovalor si $\nu \neq 0$ ($\nu = \pm|\nu|$).

Tanto este caso como el caso de las autofunciones del laplaciano en regiones cilíndricas y esféricas se tratarán con mayor detalle en las secciones siguientes.

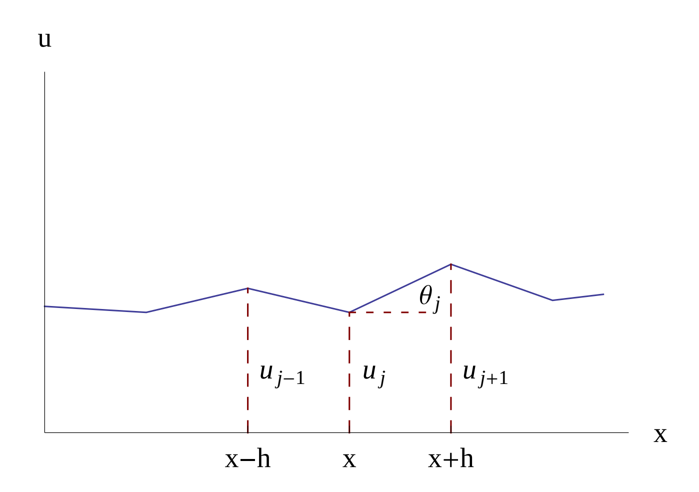


Figura 26: Esquema discreto para derivar la ecuación de ondas en una dimensión.

V.4. Ondas en una dimensión espacial

V.4.1. Generalidades

El ejemplo más típico de ecuación de tipo hiperbólico es la ecuación de ondas. Empecemos estudiando el caso de una dimensión espacial, considerando la propagación de las ondas que se producen en una cuerda vibrante homogénea. La ecuación que gobierna la deformación de la cuerda vibrante sin forzado externo puede deducirse [9] considerando un conjunto de partículas de masa $m = \rho h$, unidas por tramos, de longitud h, de una cuerda con masa despreciable, sometida a tensión constante T. Llamaremos $u_j(t)$ al desplazamiento vertical de la $j-$ésima partícula, medido a partir de su posición de equilibrio y θ_j al ángulo que forma con el eje x positivo el segmento de cuerda que une las partículas $j-$ésima y $j+1-$ésima (ver figura 26). Entonces, para deformaciones pequeñas:

$$\sin\theta_j \sim \tan\theta_j \approx \frac{u_{j+1}(t) - u_j(t)}{h} \,.$$

Por lo tanto, las componentes de la tensión sobre la $j-$ésima partícula son:

$$T_V = T\sin\theta_j - T\sin\theta_{j-1} \approx T\frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h}, \quad T_H \approx 0$$

y la segunda ley de Newton implica:

$$\ddot{u}_j(t) \approx \frac{T}{\rho}\frac{u_{j+1}(t) - 2u_j(t) + u_{j-1}(t)}{h^2} \,.$$

Si, ahora, tomamos el límite $h \to 0$ y $m \to 0$, con ρ constante, el número de partículas tiende a infinito y, al mismo tiempo, el índice j se transforma en una variable continua x, de modo que el sistema de ecuaciones ordinarias se transforma en la siguiente ecuación diferencial:

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0 \,, \tag{V.4.1}$$

donde los subíndices indican derivadas parciales y $v = \sqrt{T/\rho}$ es la velocidad de propagación, con ρ la densidad lineal de masa (constante) y T la tensión. En caso de existir una fuerza externa que actúa sobre la carga, se obtendrá la correspondiente ecuación inhomogénea, con inhomogeneidad igual a la fuerza externa por unidad de longitud de la cuerda.

Mencionemos, también, que la ecuación de ondas (V.4.1) puede obtenerse a partir de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}\rho(u_t^2 - v^2 u_x^2)\,.$$

Las correspondientes ecuaciones de movimiento, $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} = 0$ conducen inmediatamente a $u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0$ (ver VI.2).

V.4.2. Solución de D´Alembert para la cuerda infinita

Antes de analizar los casos con condiciones de contorno, resolveremos la ecuación de onda para una cuerda infinita. En este caso, como veremos, basta con establecer las condiciones iniciales para encontrar la solución, tanto de la ecuación homogénea o libre como de la ecuación inhomogénea o forzada. Dado que se trata de una ecuación diferencial de segundo orden en t, el proceso de determinar su solución requiere dos integraciones y, por lo tanto, es necesario el conocimiento de dos condiciones iniciales (perfiles iniciales de deformación y de velocidades). Comencemos por el problema homogéneo y determinemos su solución, conocida como solución de D´Alembert. Como hemos visto, dado que (V.4.1) es una ecuación hiperbólica, su solución general tiene la forma

$$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)\,, \tag{V.4.2}$$

lo que representa una onda $f(x - vt)$ propagándose hacia valores crecientes de x con velocidad v (onda progresiva) y otra, $g(x + vt)$, propagándose hacia valores decrecientes de x con velocidad $-v$ (onda regresiva). El primer término es constante a lo largo de las rectas características $x - vt = c_1$ y el segundo lo es a lo largo de las rectas características $x + vt = c_2$.

Dado que $u(x,t)$ tiene la forma (V.4.2), las condiciones iniciales (deformación y velocidad iniciales de cada punto de la cuerda) implican

$$u(x,0) = \phi(x) = f(x) + g(x)\,,$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = v[g'(x) - f'(x)]$$

y podemos determinar las funciones f y g como

$$f(x) = \frac{1}{2}[\phi(x) - \Psi(x)/v]\,,$$

$$g(x) = \frac{1}{2}[\phi(x) + \Psi(x)/v]\,,$$

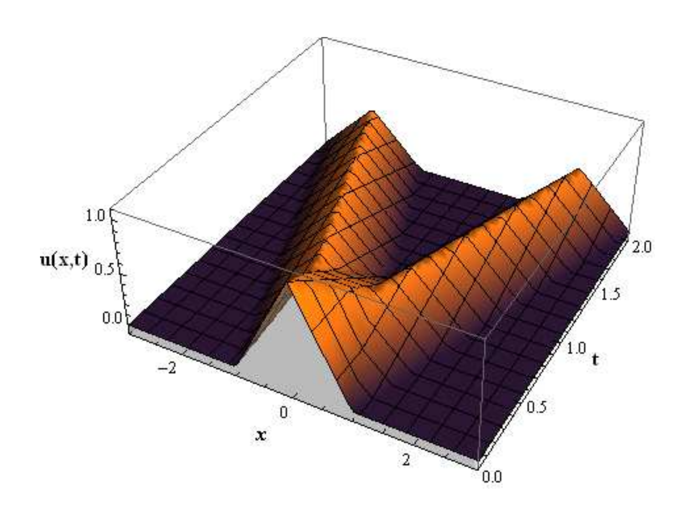


Figura 27: La deformación u como función de x y t para deformación inicial $\phi(x) = (1-|x|)H(1-|x|)$ y perfil inicial de velocidades $\psi(x) = 0$, $v = 1$.

donde $\Psi(x) = \int_{x_0}^{x} \psi(x')dx'$ es una primitiva de $\psi(x)$. Teniendo en cuenta que $\Psi(x + vt) - \Psi(x - vt) = \int_{x-vt}^{x+vt} \psi(x')dx'$, se encuentra que la solución está dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x-vt) + \phi(x+vt)] + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \psi(x')dx' \,, \qquad \text{(V.4.3)}$$

que se conoce como la solución de D' Alembert. La forma inicial $\phi(x)$ se separa, entonces, en dos pulsos $\frac{1}{2}\phi(x \pm vt)$ que viajan en sentidos opuestos, mientras que la velocidad inicial origina dos pulsos de distinto signo $\pm\frac{1}{2v}\Psi(x \pm vt)$, también viajando en sentidos opuestos. Partiendo la integral en forma adecuada, es fácil verificar que la solución de D´Alembert respeta (obviamente, pues así la dedujimos) la forma general (suma de ondas progresiva y regresiva) de la ecuación V.4.2.

V.4.2.1. Solución fundamental para la cuerda infinita

Es interesante observar que la solución de D´Alembert también puede expresarse en la forma

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} [K_t(x-x',t)\phi(x') + K(x-x',t)\psi(x')]dx' \,, \qquad \text{(V.4.4)}$$

donde

$$K(x-x',t) = \frac{1}{2v}[H(x-x'+vt) - H(x-x'-vt)] \qquad \text{(V.4.5)}$$

es la solución de la ecuación homogénea

$$K_{tt}(x-x',t) - v^2 K_{xx}(x-x',t) = 0 \qquad \text{(V.4.6)}$$

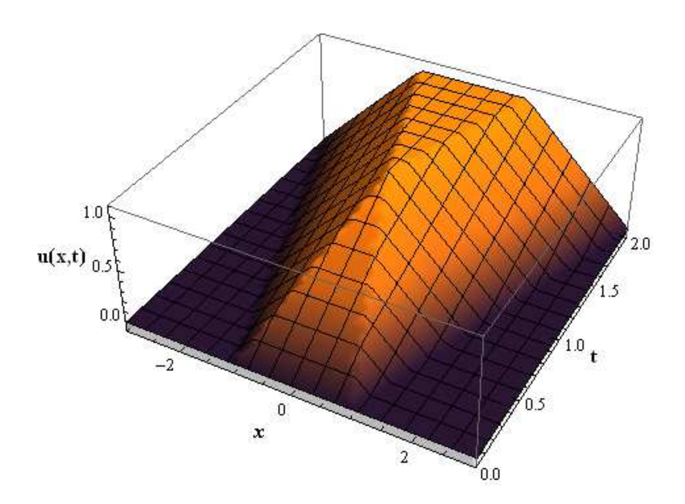


Figura 28: La deformación u como función de x y t, para deformación inicial $\phi(x) = 0$ y perfil inicial de velocidades $\psi(x) = H(1 - |x|)$, $v = 1$.

correspondiente a las condiciones iniciales $K(x - x', 0) = 0$ y $K_t(x - x', 0) = \delta(x - x')$. $K(x - x', t)$ se denomina *solución fundamental* y, a veces, *función respuesta*. Depende, en el caso de una cuerda infinita, sólo de la diferencia $x - x'$, debido a la invariancia traslacional. Para $t > 0$, $K(x, t) = 1/(2v)$ en el *cono del futuro* (la región $|x| \leq vt$), anulándose fuera del mismo, mientras que para $t < 0$, $K(x, t) = -1/(2v)$ en el *cono del pasado* ($|x| \leq -vt$), anulándose también fuera del mismo.

Para $t > 0$, $K(x - x', t)$ es, por lo tanto, no nula (e igual a $1/(2v)$) sólo en el intervalo $|x - x'| < vt$, mientras que $K_t(x - x', t) = (\delta(x - x' + vt) + \delta(x - x' - vt))/2$. Para $t > 0$, los datos iniciales que se encuentran fuera del cono del pasado del punto (x, t) no afectan, en consecuencia, el valor de $u(x, t)$.

La ecuación (V.4.4) muestra que la solución para las condiciones iniciales $u(x, 0) = 0\,\forall x$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$ es la convolución, en la variable x, de la solución fundamental con $\psi(x)$. Por su parte, la solución correspondiente a $u(x, 0) = \phi(x)$, $u_t(x, 0) = 0\,\forall x$ es la convolución de K_t con $\phi(x)$. En efecto, es directo mostrar que, dado que $K(x - x', t)$ satisface la ecuación homogénea (V.4.6), $K_t(x - x', t)$ también la satisface. Además, la segunda condición inicial satisfecha por $K(x - x', 0)$ muestra que su derivada temporal satisface la condición de tener una deformación inicial igual a la delta de Dirac. En cuanto a su perfil inicial de velocidades, de la ecuación diferencial (V.4.6) se tiene $K_{tt}(x - x', 0) = v^2 K_{xx}(x - x', 0) = 0$, debido a que K es idénticamente nula para $t = 0$.

Notemos, también, que la solución para $u(x, 0) = \phi(x)$ y $u_t(x, 0) = 0\,\forall x$ puede obtenerse por convolución de $\phi(x)$ con $K_t(x - x', t)$ y, por lo tanto, es la derivada temporal de la solución correspondiente a $u(x, 0) = 0\,\forall x$ y $u_t(x, 0) = \phi(x)$, lo que puede verificarse directamente. Finalmente, la propiedad de superposición implica que la solución de la ecuación homogénea, con ambas condiciones iniciales no nulas, es la suma de las dos anteriores.

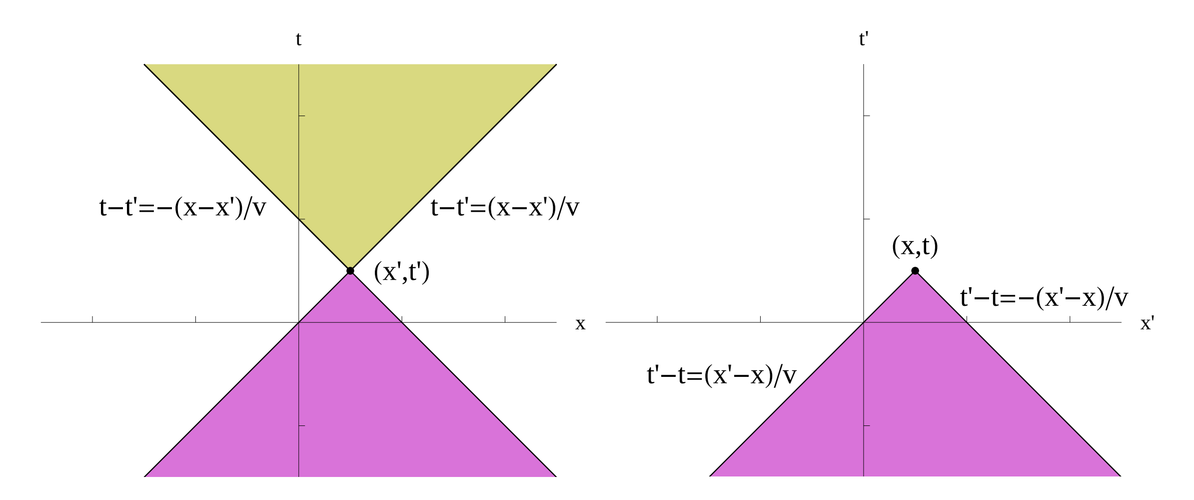


Figura 29: Izquierda: El cono del pasado y el cono del futuro respecto de un punto (x',t') en el plano (x,t). Ambos forman el soporte de $K(x-x',t-t')$, mientras que sólo el cono del futuro es el soporte de $G(x-x',t-t')$. Derecha: El cono del pasado de un punto (x,t) en el plano (x',t'), que es el soporte de $G(x-x',t-t')$.

V.4.2.2. Ecuación inhomogénea. Función de Green causal para la cuerda infinita

Consideremos ahora el problema de las vibraciones forzadas de una cuerda. En este caso, tendremos:

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = f(x,t)\,, \tag{V.4.7}$$

con $f(x,t) = F(x,t)/\rho$, siendo $F(x,t)$ la fuerza externa aplicada por unidad de longitud. Entonces (suponiendo que u_x y u_t se anulan para $x \to \pm\infty$) tenemos $dE/dt = \int_{-\infty}^{\infty} u_t F(x,t)dx$, donde la integral representa la potencia aplicada.

La solución de (V.4.7) puede obtenerse por distintos métodos. Consideraremos aquí únicamente el método basado en la función de Green causal. Definimos la *función de Green causal* como

$$G(x,t) \equiv K(x,t)H(t)\,, \tag{V.4.8}$$

donde $H(t)$ es la función de Heaviside. Puede verificar el lector que $G(x-x',t-t')$ satisface la ecuación

$$G_{tt}(x-x',t-t') - v^2 G_{xx}(x-x',t-t') = \delta(t-t')\delta(x-x')\,, \tag{V.4.9}$$

dado que $K_{tt} - v^2 K_{xx} = 0$ y $K(x,t)\delta(t) = K(x,0)\delta(t) = 0$. Entonces, $G(x-x',t-t')$ representa la respuesta del sistema a una fuerza impulsiva en el punto x' y en el instante t', estando el sistema en reposo para $t < t'$. Depende sólo de $x - x'$ debido a la invariancia traslacional. Además, $G(x-x',t-t') = G(x'-x,t'-t)$ ya que, siendo autoadjunto el operador en derivadas parciales, se satisface la propiedad de reciprocidad, de modo totalmente análogo al ya discutido en el contexto de problemas de Sturm-Liouville. Como

función de x, t, $G(x,t)$ es no nula (e igual a $1/(2v)$) sólo en el cono del futuro del punto (x', t') ($|x-x'| \leq v(t-t')$) mientras que, como función de x', t', es no nula sólo en el cono del pasado del punto (x,t) ($|x'-x| \leq v(t-t')$). La solución de la ecuación inhomogénea (V.4.7), suponiendo que el sistema está en reposo para $t = -\infty$ y teniendo en cuenta la linealidad de la ecuación y el hecho de que podemos descomponer $f(x,t)$ como una integral de fuerzas impulsivas ($f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x',t')\delta(x-x')\delta(t-t')dx'dt'$), es

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x-x', t-t')f(x',t')dx'dt' \,, \qquad \text{(V.4.10)}$$

donde el integrando es, por supuesto, no nulo sólo en el cono del pasado del punto (x,t). Esta doble convolución de la función de Green causal con la inhomogeneidad se conoce como fórmula de Duhamel.

Problema sugerido V.4.1 Verificar, utilizando la linealidad de la ecuación que, efectivamente, la expresión anterior para $u(x,t)$ satisface la ecuación (V.4.7).

La solución general de la ecuación

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = f(x,t) \,,$$

con $f(x,t) = 0$ para $t < 0$ y las condiciones iniciales $u(x,0) = \phi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, puede entonces escribirse, para $t > 0$, como

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[K_t(x-x',t)\phi(x') + K(x-x',t)\psi(x')\right] dx' \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x-x',t-t')f(x',t')dx'dt' \,, \end{aligned} \qquad \text{(V.4.11)}$$

donde hemos utilizado la propiedad de superposición, derivada de la linealidad de la ecuación diferencial.

Como ejemplo simple, si $f(x,t) = -cH(t)$ (fuerza constante para $t > 0$) y $\phi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, se obtiene, para $t > 0$,

$$u(x,t) = -\frac{c}{2v}\int_0^t dt' \int_{x-vt'}^{x+vt'} dx' = -ct^2/2 \,,$$

resultado que corresponde a una aceleración constante de los puntos de la cuerda.

V.4.3. Cuerda semi-infinita con extremo fijo

Analicemos ahora el comportamiento de una cuerda semi-infinita con origen en $x = 0$. Supondremos, primero, que la cuerda se encuentra fija en ese extremo, lo que implica la *condición de contorno* $u(0,t) = 0 \ \forall\ t$. Consideremos, en primer lugar, la ecuación diferencial homogénea ($f(x,t) = 0$) con condiciones iniciales $u(x,0) = \phi(x)$, $u_t(x,0) =$

$\psi(x)$, donde ϕ y ψ están definidas para $x \geq 0$. Debemos, entonces, encontrar la solución al problema

$$u_{tt} - v^2 u_{xx} = 0\,, \qquad \text{(V.4.12)}$$
$$u(x,0) = \phi(x)\,, \qquad \text{(V.4.13)}$$
$$u_t(x,0) = \psi(x)\,, \qquad \text{(V.4.14)}$$

para $x \geq 0$, con la condición de contorno

$$u(0,t) = 0 \quad \forall t \geq 0\,. \qquad \text{(V.4.15)}$$

Podemos utilizar la solución de D'Alembert que hemos estudiado antes, extendiendo en forma ficticia la cuerda a todos los valores de x y considerando, después, sólo la solución en la región física $x \geq 0$, a condición de garantizar el cumplimiento de la condición de contorno extendiendo adecuadamente las funciones $\phi(x)$ y $\psi(x)$, que sólo están definidas para $x \geq 0$, a la región no física $x < 0$. Es un caso particular del llamado método de las imágenes, de amplia aplicación en la resolución de problemas con condiciones de contorno. Veremos a continuación que la forma adecuada de garantizar el cumplimiento de la presente condición de contorno consiste en extender ambas funciones que determinan las condiciones iniciales como funciones impares de x. En efecto, la solución a la ecuación diferencial tiene la forma

$$u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt), \;\; \forall x \geq 0\,.$$

La condición de contorno implica

$$u(0,t) = f(-vt) + g(vt) = 0, \;\; \forall t \geq 0$$

o, equivalentemente,

$$f(-\xi) = -g(\xi), \;\; \forall \xi \geq 0\,. \qquad \text{(V.4.16)}$$

Usando este resultado, resulta para la deformación inicial

$$u(x,0) = f(x) + g(x) = f(x) - f(-x) = \phi(x), \;\; \forall x \geq 0\,.$$

De esta última expresión, evaluada en $-x$, resulta

$$\phi(-x) = f(-x) - f(x) = -\phi(x)\,,$$

lo cual muestra que, en efecto, la deformación inicial debe extenderse como impar a la región no física.

En cuanto al perfil inicial de velocidades,

$$u_t(x,0) = v(f'(x) - g'(x)) = \psi(x), \;\;\; \forall x \geq 0\,.$$

Derivando la ecuación (V.4.16) resulta

$$f'(-\xi) = g'(\xi), \quad \forall x \geq 0 \,.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\psi(x) = v(f'(x) - f'(-x)), \;\; \forall x \geq 0 \,.$$

En estas condiciones, $\psi(-x) = v(f'(-x) - f'(x)) = -\psi(x), \;\; \forall x \geq 0$, lo cual muestra que también el perfil inicial de velocidades debe ser extendido en forma impar para garantizar que se satisfaga la condición de contorno de extremo fijo a todo tiempo $t \geq 0$.

Resumiendo: en este caso puede usarse, para $x \geq 0$, la expresión de D'Alembert de la solución para una cuerda infinita, extendiendo ambas condiciones iniciales en forma *impar* respecto de $x = 0$, es decir,

$$\phi(-x) = -\phi(x), \;\; \psi(-x) = -\psi(x) \,.$$

Es inmediato verificar que, entonces, la solución (V.4.3) satisface la condición de contorno adecuada. En efecto, utilizando el subíndice I para denotar las respectivas extensiones impares de las condiciones iniciales, se tiene

$$u(0,t) = \frac{1}{2}[\phi_I(vt) + \phi_I(-vt)] + \frac{1}{2v}\int_{-vt}^{vt} \psi_I(x')dx' = 0, \;\; \forall t \geq 0 \,,$$

donde hemos usado la definición de función impar y que la integral de una función impar sobre un intervalo simétrico se anula.

La consecuencia física inmediata es que los pulsos se reflejan en el origen *con inversión de signo*, ya que el pulso que se propaga hacia la izquierda en la región física se encuentra, al llegar al origen, con el pulso progresivo "virtual", que proviene de $x < 0$ y que tiene el signo opuesto, el cual luego continúa propagándose hacia la derecha en el sector "real".

La función respuesta correspondiente, definida para $x \geq 0$, $x' \geq 0$, es

$$K_D(x, x', t) = K(x - x', t) - K(x + x', t)$$

y satisface

$$K_{D_{tt}}(x, x', t) - v^2 K_{D_{xx}}(x, x', t) = 0 \,,$$

$$K_D(x, x', 0) = 0, \;\; K_{D_t}(x, x', 0) = \delta(x - x') \,, \quad K_D(0, x', t) = 0 \,.$$

Representa la solución de la ecuación homogénea con las condiciones iniciales $\phi(x) = 0$, $\psi(x) = \delta(x - x')$, que satisface la condición de contorno $K_f(0, x', t) = 0$. Esta no es otra cosa que la solución de la ecuación homogénea para la cuerda infinita con las condiciones iniciales $\phi(x) = 0$ y $\psi(x) = \delta(x - x') - \delta(x + x')$. Notemos que $K_D(x, x', t)$ *ya no*

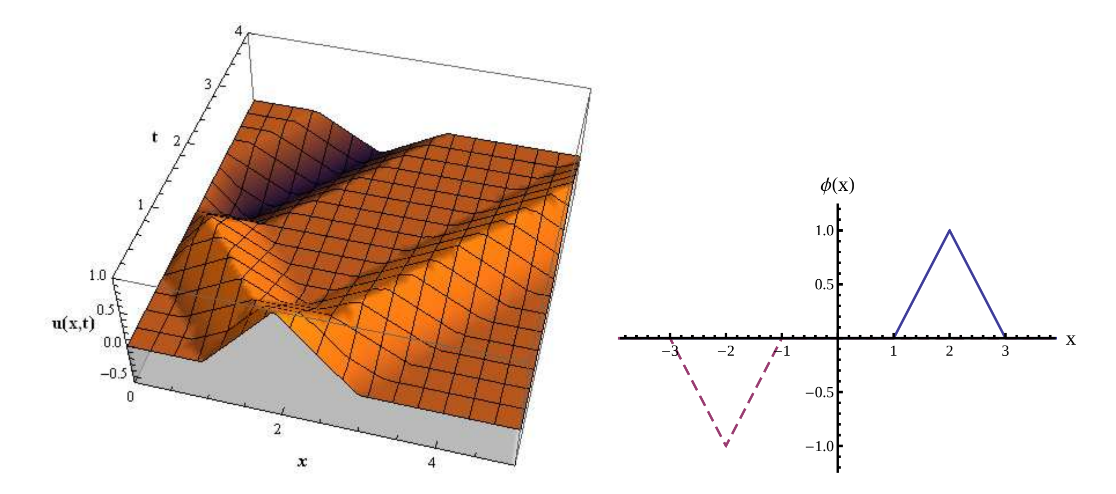


Figura 30: Izquierda: La deformación de una cuerda semi-infinita con extremo fijo en $x = 0$, como función de x y t, para deformación inicial triangular y perfil inicial de velocidades idénticamente nulo (con $v = 1$). Obsérvese la evolución de los frentes de onda progresivo y regresivo en la región física, así como la reflexión con cambio de signo, que ocurre a partir de $t = 2$. Derecha: La correspondiente extensión impar de la condición inicial.

es función de $(x - x')$, dado que se ha roto la invariancia traslacional. La solución final puede escribirse como

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^\infty [K_{D_t}(x,x',t)\phi(x') + K_D(x,x',t)\psi(x')]dx' \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}[\phi(x-vt)+\phi(x+vt)] + \int_{x-vt}^{x+vt}\psi(x')dx' & x \geq vt \\ \frac{1}{2}[-\phi(vt-x)+\phi(x+vt)] + \int_{vt-x}^{x+vt}\psi(x')dx' & x < vt \end{cases} \end{aligned} \quad (V.4.17)$$

Del mismo modo, la solución de la ecuación inhomogénea $u_{tt} - v^2 u_{xx} = f(x,t)$ puede hallarse extendiendo $f(x,t)$ en forma impar para $x < 0$ ($f(-x,t) = -f(x,t)$) y utilizando entonces la solución para la cuerda infinita:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x-x',t-t')f(x',t')dx'dt' \\ &= \int_0^\infty dx' \int_{-\infty}^{\infty} G_D(x,x'.t-t')f(x',t')dt' \,, \end{aligned}$$

con

$$G_D(x,x',t) = K_D(x,x',t)H(t) = G(x-x',t) - G(x+x',t) \quad (V.4.18)$$

la función de Green causal para la cuerda semi-infinita, que satisface (para $x > 0$, $x' > 0$)

$$G_{D_{tt}}(x,x',t-t') - v^2 G_{D_{xx}}(x,x',t-t') = \delta(x-x')\delta(t-t') \,,$$

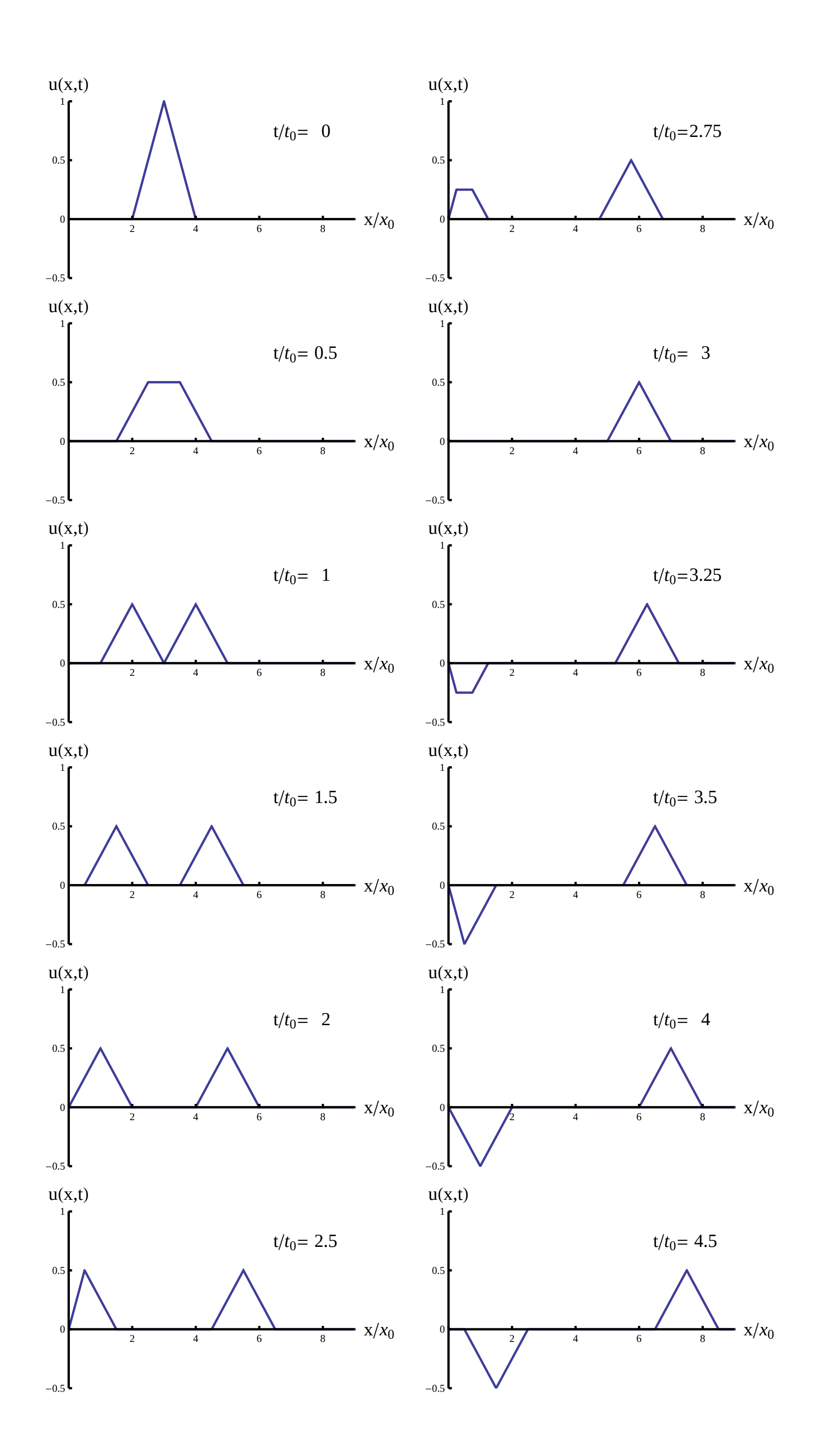


Figura 31: Perfil de una cuerda semi-infinita con extremo fijo para distintos tiempos. Aquí, x_0 y t_0 son unidades de espacio y tiempo tales que $vt_0 = x_0$.

con la condición de contorno $G_D(0,x',t-t')=0$ y la condición inicial $G_D(x,x',t-t')=0$ para $t<t'$. Es fácil verificar, entonces, que $u(x,t)$ es la solución particular de la ecuación inhomogénea que satisace $u(x,t)=0$ para $t\to-\infty$, con $u(0,t)=0\;\forall\, t$.

Finalmente, discutamos el problema con condiciones de contorno *inhomogéneas*

$$u_{tt}-v^2u_{xx}=0,\quad u(0,t)=g(t)\,. \tag{V.4.19}$$

Supondremos $u(x,t)=0$, $u_t(x,t)=0$ y $g(t)=0$ para $t<0$, de modo que, para $t\geq 0$, la elongación se origine sólo por la condición de contorno. Es fácil ver que la solución, que tiene que ser de la forma (V.4.2), es sencillamente

$$u(x,t)=g(t-x/v)\,, \tag{V.4.20}$$

ya que satisface $u_{tt}-v^2u_{xx}=0$ y la condición de contorno. Las excitaciones en $x=0$ se propagan hacia la derecha con velocidad v. Puede escribirse la solución también en términos de G_D como

$$u(x,t)=v^2\int_{-\infty}^{\infty}G_{D_{x'}}(x,x',t-t')|_{x'=0}\,g(t')dt'\,, \tag{V.4.21}$$

dado que $G_{D_{x'}}(x,x',t)|_{x'=0}=v^{-1}\delta(x-vt)H(t)$ $(x>0)$.

Debido a la linealidad, la solución general de la ecuación

$$u_{tt}-v^2u_{xx}=f(x,t)$$

con las condiciones iniciales $u(x,0)=\phi(x)$, $u_t(x,0)=\psi(x)$, y la condición de contorno $u(0,t)=g(t)$, suponiendo que tanto f como g se anulan para $t<0$, puede escribirse como

$$\begin{aligned}u(x,t) &= \int_0^{\infty}[G_{D_t}(x,x',t)\phi(x')+G_D(x,x',t)\psi(x')]dx' \\ &\quad+\int_0^{\infty}dx'\int_0^{\infty}dt'G_D(x,x',t-t')f(x',t')+g(t-x/v)\,. \end{aligned}\tag{V.4.22}$$

V.4.4. Cuerda semi-infinita con extremo libre

Pasemos ahora al caso de la cuerda con el extremo *libre* ($u_x(0,t)=0$, lo que implica que no existen fuerzas verticales en $x=0$). En esta situación, puede procederse en forma análoga al caso de extremo fijo, esta vez completando las condiciones iniciales (y la inhomogeneidad, si la hubiese) en forma *par* con respecto a $x=0$ ($\phi(-x)=\phi(x)$, $\psi(-x)=\psi(x)$, $f(x,t)=f(-x,t)$). En tal caso, la solución (V.4.3) implica

$$u_x(0,t)=\frac{1}{2}[\phi'(vt)+\phi'(-vt)]+\frac{1}{2v}[\psi(vt)-\psi(-vt)]=0\,.$$

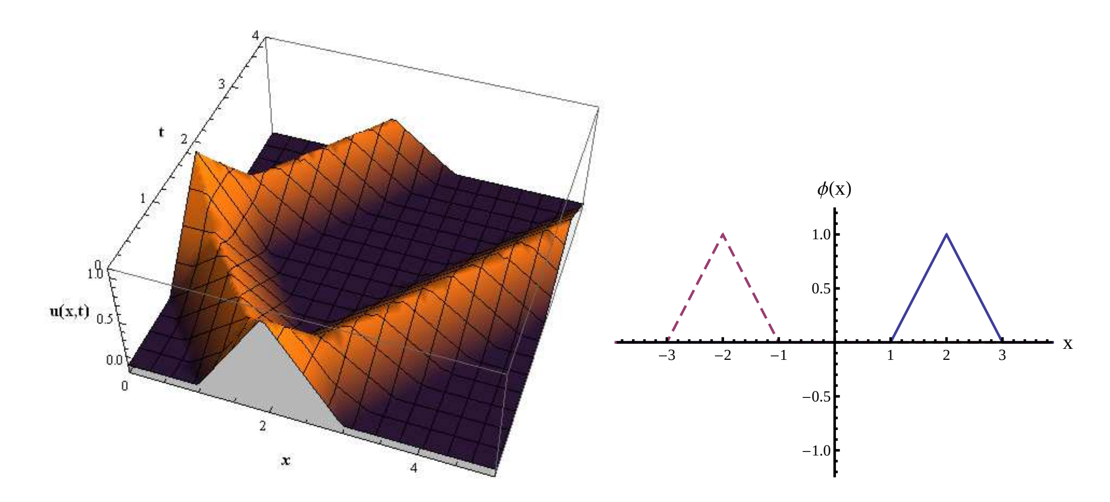


Figura 32: Izquierda: La deformación $u(x,t)$ en la región física para una cuerda semi-infinita con extremo libre, con deformación inicial triangular y perfil inicial de velocidades idénticamente nulo ($v = 1$). Pueden observarse la reflexión sin cambio de signo y el comportamiento de la derivada con respecto a x en $x = 0$. Derecha: La correspondiente extensión par de la condición inicial.

La consecuencia física es la reflexión de los pulsos, en el origen, sin cambio de signo.

La función respuesta correspondiente es

$$K_N(x,x',t) = K(x-x',t) + K(x+x',t) \tag{V.4.23}$$

y la función de Green causal es

$$G_N(x,x',t) = K_N(x,x',t)H(t) = G(x-x',t) + G(x+x',t). \tag{V.4.24}$$

Ambas satisfacen, de modo evidente, la condición de contorno de anulación de su derivada con respecto a x en $x = 0$.

V.4.5. Cuerda Finita: energía y condiciones de contorno

La energía de un segmento de cuerda $x_1 \leq x \leq x_2$ es

$$E_{x_1 x_2} = \frac{\rho}{2}\int_{x_1}^{x_2}(u_t^2 + v^2 u_x^2)dx\,, \tag{V.4.25}$$

donde el primer término en el integrando representa la energía cinética por unidad de longitud y el segundo, la energía potencial elástica. La derivada temporal de la ecuación anterior conduce a

$$\begin{aligned}\frac{dE_{x_1 x_2}}{dt} &= \rho\int_{x_1}^{x_2}(u_t u_{tt} + v^2 u_x u_{xt})dx \\ &= \rho\int_{x_1}^{x_2}[u_t(u_{tt} - v^2 u_{xx})]dx + \rho v^2 u_x u_t|_{x_1}^{x_2}\,,\end{aligned} \tag{V.4.26}$$

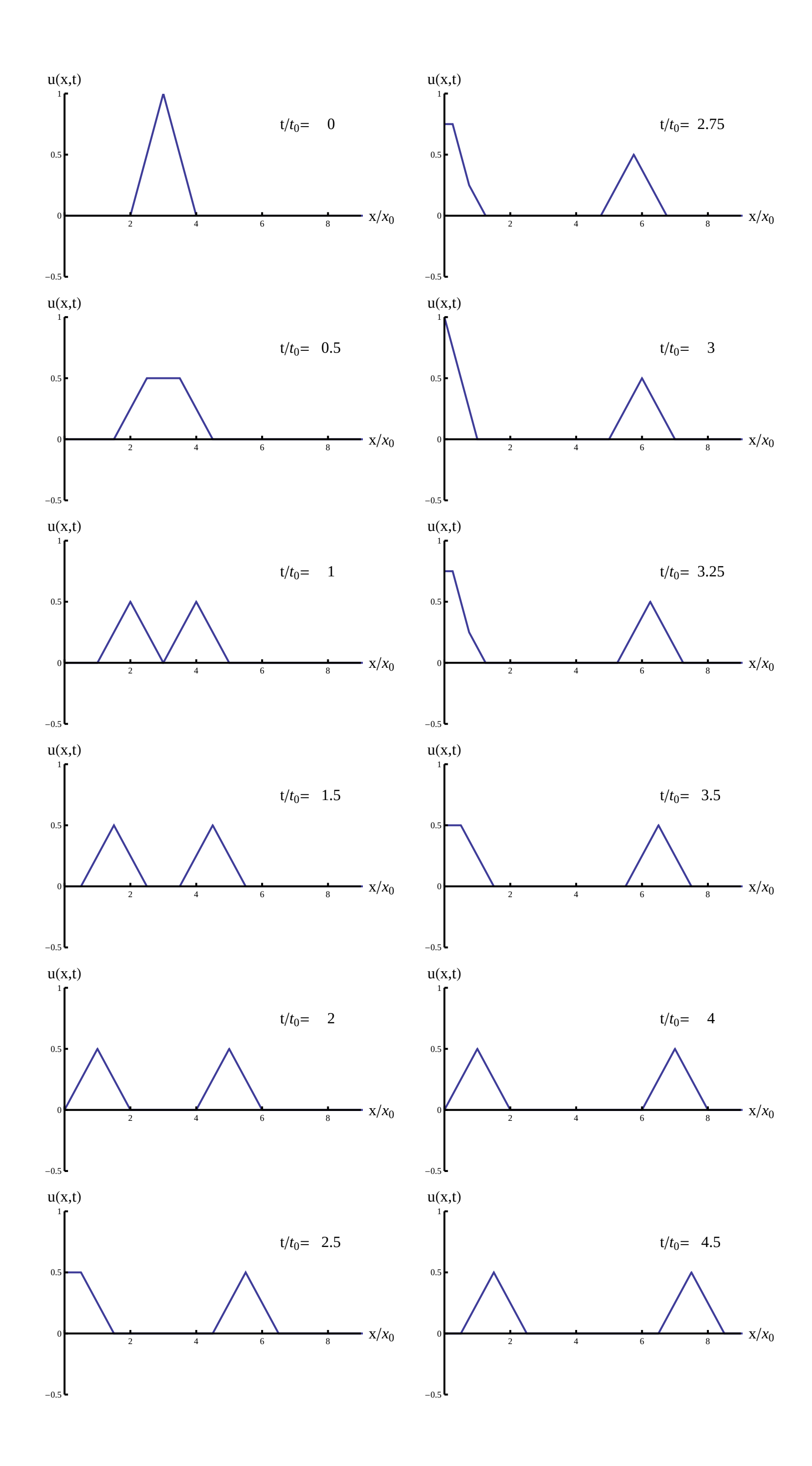


Figura 33: Perfil de una cuerda semi-infinita con extremo libre para distintos tiempos. Aquí x_0 y t_0 son unidades de espacio y tiempo tales que $vt_0 = x_0$.

donde hemos efectuado una integración por partes. El primer término del lado derecho de la igualdad anterior se anula si $u(x,t)$ es solución de la ecuación de ondas (homogénea), mientras que el segundo término representa el flujo de energía por unidad de tiempo (potencia) a través de los bordes del segmento. El mismo es nulo si, en cada uno de los bordes $x = x_i$, $i = 1, 2$, se satisface la versión homogénea ($f(t) = 0\,\forall t$, $g(t) = 0\,\forall t$) de alguna de las dos primeras condiciones de contorno locales que se detallan a continuación:

1. Condiciones de contorno Dirichlet: posición del extremo de la cuerda determinada como función del tiempo: $u(x = x_i, t) = f(t)$. En particular, el caso homogéneo $f(t) = 0, \forall t$, representa la condición de extremo fijo $u(x = x_i, t) = 0$.

2. Condiciones de contorno Neumann: tensión en el extremo de la cuerda determinada como función del tiempo: $u_x(x = x_i, t) = g(t)$. En particular, el caso homogéneo $g(t) = 0, \forall t$, representa la condición de extremo libre (ya que $u_x(x = x_i, t) = 0$ implica anulación de la componente vertical de la tensión en el extremo).

3. Condiciones de contorno Robin: cierta combinación lineal de la deformación y su derivada normal en el extremo conocida como función del tiempo: $u_n(x = x_i, t) + ku(x = x_i, t) = h(t)$, con $k > 0$, donde n es la normal exterior (u_x en $x = x_2$ y $-u_x$ en $x = x_1$). El caso homogéneo de la presente ecuación representa el extremo sujeto a una fuerza restauradora proporcional a la deformación.

Para cualquier combinación de las dos primeras condiciones antes enumeradas en uno y otro extremos es posible demostrar, usando el carácter constante de la energía que aparece en la ecuación (V.4.25), que la solución de la ecuación de ondas (tanto homogénea como inhomogénea) en la región $x_1 \leq x \leq x_2$, para determinadas condiciones iniciales del tipo $u(x, 0) = \phi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, es *única*. En efecto, la diferencia $w = u_1 - u_2$ entre dos posibles soluciones del mismo problema se anula inicialmente ($w(x, 0) = 0$, $w_t(x, 0) = 0$). Además, para condiciones de los dos primeros tipos, en los bordes satisface $w(x_i, t) = 0$, $i = 1, 2$ (o bien $w_x(x_i, t) = 0$, $i = 1, 2$, o condiciones de un tipo en un extremo y de otro tipo en el otro extremo), por lo que su energía $E_{x_1 x_2}$ es constante e igual a su valor inicial, que es nulo. Esto implica que $w(x, t)$ es constante, es decir $w(x, t) \equiv 0$ en virtud de la condiciones de contorno e iniciales que satisface.

En el caso de condiciones Robin , $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ está sujeta a acoplamiento elástico en el borde. Usando explícitamente las condiciones de contorno en ambos extremos se tiene, de la ecuación (V.4.26),

$$\frac{dE_{x_1\,x_2}}{dt} = -\frac{k\rho v^2}{2}\left[\frac{d}{dt}[w(x_2,t)]^2 + \frac{d}{dt}[w(x_1,t)]^2\right] .$$

Integrando en la variable t se obtiene para la energía

$$E_{x_1\,x_2}(t) = -\frac{k\rho v^2}{2}\left[[w(x_2,t)]^2 + [w(x_1,t)]^2\right] \leq 0\,,$$

donde hemos usado que $w(x, 0) = 0\,\forall\, x$.

Por su parte, la ecuación (V.4.25) muestra que $E_{x_1 x_2}(t) \geq 0$. Por lo tanto, la energía resulta idénticamente nula, lo cual conduce a $w(x,t)$ idénticamente nula y, por ende, a la unicidad de la solución.

V.4.6. Cuerda Finita: Resolución por Separación de Variables

El problema de una cuerda finita de longitud L, con condiciones de contorno homogéneas dadas en ambos extremos puede, en forma similar, resolverse mediante el método de las imágenes. Por ejemplo, si ambos extremos están fijos, deberá garantizarse que $u(0,t) = u(L,t) = 0$, $\forall t \geq 0$. Esto requiere que las funciones $\phi(x)$ y $\psi(x)$, dadas sólo para $0 \leq x \leq L$, sean extendidas como impares, tanto con respecto a $x = 0$ como con respecto a $x = L$. Entonces, tendremos

$$\phi(x) = -\phi(-x) \quad \phi(x) = -\phi(2L - x), \quad \forall x \in [0, L]$$

o, equivalentemente, $\phi(x) = \phi(-x)$ y $\phi(x)$ periódica de período $2L$. Lo mismo vale para $\psi(x)$ y, eventualmente, para la inhomogeneidad. Sin embargo, la solución se obtiene de modo más directo utilizando el método de separación de variables, que conduce a un desarrollo de las soluciones en autofunciones de un operador de Sturm-Liouville (Ver V.3).

Consideremos, nuevamente, la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \,. \tag{V.4.27}$$

Planteando una solución *particular* del tipo

$$u(x,t) = T(t)X(x)$$

se obtiene $T''(t)X(x) = v^2 X''(x)T(t)$, es decir,

$$\frac{T''(t)}{v^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 \,,$$

donde k debe ser constante, dado que los dos primeros miembros dependen únicamente de t y x respectivamente. Se obtienen así las ecuaciones

$$X'' = -k^2 X,$$

$$T'' = -(vk)^2 T,$$

cuya solución general es

$$\begin{aligned} X(x) &= A\cos(kx) + B\sin(kx) \\ T(t) &= a\cos(vkt) + b\sin(vkt)\,, \end{aligned}$$

si $k \neq 0$ y

$$X(x) = A + Bx, \quad T(t) = a + bt\,,$$

si $k=0$. La solución para $k\neq 0$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} u(x,t) &= [A\cos(kx)+B\sin(kx)][a\cos(vkt)+b\sin(vkt)] \\ &= \tfrac{1}{2}[\cos(kx-vkt)(Aa+Bb)+\cos(kx+vkt)(Aa-Bb) \\ &\quad +\sin(kx-vkt)(Ba-Ab)+\sin(kx+vkt)(Ba+Aa)] \end{aligned}$$

y se verifica que es de la forma $f(x-vt)+g(x+vt)$. Lo mismo ocurre para $k=0$, ya que $x=\frac{1}{2}((x+vt)+(x-vt)$ y $t=\frac{1}{2}((x+vt)-(x-vt))/v$.

V.4.6.1. Cuerda finita con extremos fijos

Consideremos, en particular, una cuerda *finita* de longitud L. Si los extremos están fijos, tenemos la condición de contorno

$$u(0,t)=u(L,t)=0\,. \qquad \text{(V.4.28)}$$

Como ya sabemos, bajo estas condiciones de contorno, no existe solución con $k=0$. Para $k\neq 0$, la condición en el origen exige $A=0$ y la condición en $x=L$ reduce a

$$B\sin(kL)=0\,,$$

de donde, para $B\neq 0$,

$$k=\frac{n\pi}{L},\quad n=1,2,\ldots$$

Esto muestra que k es, efectivamente, *real* (no hay solución para k complejo), como corresponde a un operador de Sturm-Liouville autoadjunto en la variable x. En efecto, los valores de k^2 son precisamente los *autovalores* del operador de Sturm Liouville $L=-\frac{d^2}{dx^2}$ con la condición de contorno (V.4.28), y

$$X(x)=B\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

son las correspondientes autofunciones (recordemos que las correspondientes a autovalores distintos son ortogonales:$\int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{L}x)dx=\frac{L}{2}\delta_{nm}$). Representan los modos normales de vibración con la condición de contorno (V.4.28). El n-ésimo modo posee $n-1$ nodos $x_m=\frac{m}{n}L$, $m=1,\ldots,n-1$, en los que $X(x_m)=0$.

La solución particular producto es, pues, de la forma

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sin(\frac{n\pi}{L}x)[a_n\cos(\frac{n\pi v}{L}t)+b_n\sin(\frac{n\pi v}{L}t)] \qquad \text{(V.4.29)} \\ &= A_n\sin(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{n\pi v}{L}t-\gamma),\quad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}\,, \end{aligned}$$

con $\tan\gamma=b_n/a_n$, que representa una onda *estacionaria*. Es la superposición de ondas sinusoidales de igual amplitud que se propagan en sentidos opuestos:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \tfrac{1}{2}\{a_n[\sin[k_n(x-vt)]+\sin[k_n(x+vt)]] \\ &\quad +b_n[\cos[k_n(x-vt)]-\cos[k_n(x+vt)]]\}\,, \end{aligned}$$

con $k_n = n\pi/L$, $n = 1, 2, ..., \infty$.

Nótese que, como indicaba nuestra discusión sobre el método de las imágenes, la solución (V.4.29) es impar y periódica de período $2L$ en la variable x.

La solución *general* de (V.4.27), en este caso, es de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{L}x)[a_n \cos(\frac{n\pi v}{L}t) + b_n \sin(\frac{n\pi v}{L}t)]. \qquad \text{(V.4.30)}$$

En efecto, si $u(x,0) = \phi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x)$, entonces

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\,,\\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{L} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\,,\end{aligned}$$

que representan el desarrollo de medio rango en serie de senos de $\phi(x)$ y $\psi(x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx\,,\\ b_n &= \frac{2}{n\pi v}\int_0^L \psi(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx\,.\end{aligned}$$

Notemos, una vez más, que la solución general (V.4.30) *no* es de la forma $X(x)T(t)$, sino una suma de soluciones producto.

Función respuesta. La función respuesta $K(x,x',t)$ es la solución para las condiciones iniciales $\phi(x) = 0$, $\psi(x) = \delta(x - x')$. En este caso, se obtiene:

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{n\pi v}\sin(\frac{n\pi}{L}x')\,,$$

de donde

$$K_{DD}(x,x',t) = \frac{2}{n\pi v}\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{n\pi}{L}x')\sin(\frac{n\pi v}{L}t)\,.$$

La solución anterior para $u(x,0) = \phi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ puede, entonces, escribirse como

$$u(x,t) = \int_0^L K_{DD_t}(x,x',t)\phi(x')dx' + \int_0^L K_{DD}(x,x',t)\psi(x')dx'\,, \qquad \text{(V.4.31)}$$

en forma similar al caso de la cuerda infinita. Notar que, como en el caso de la cuerda semi-infinita, $K_{DD}(x,x',t)$ es función de x y x' separadamente, y no de $x - x'$, ya que se ha perdido la invariancia traslacional. Sin embargo, sigue cumpliéndose que $K_{DD}(x,x',t) = K_{DD}(x',x,t)$, debido al carácter autoadjunto del operador de Sturm-Liouville en la variable x.

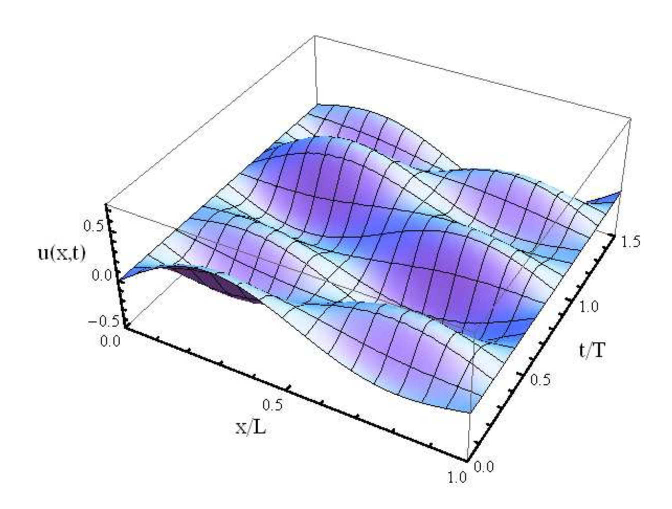


Figura 34: Evolución de la elongación de una cuerda finita fija en los bordes para condición inicial $u(x,0) \propto \sin(\pi x/L) + \sin(2\pi x/L)$, $u_t(x,0) = 0$. L es la longitud de la cuerda y T el período del modo fundamental.

V.4.6.2. Cuerda finita con extremos libres

En este caso, la condición de contorno es

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0\,. \tag{V.4.32}$$

Para $k \neq 0$, las condiciones de contorno implican $B = 0$ y la ecuación

$$A\sin(kL) = 0\,,$$

de donde

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \ldots\,.$$

Por su parte, para $k = 0$ sobrevive el modo constante en x. Resumiendo, se tiene

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 2, \ldots\,.$$

Esto muestra que k es, efectivamente, *real*, como corresponde a un operador de Sturm-Liouville autoadjunto (no hay solución para k complejo). En efecto, los valores de k^2 son los *autovalores* del operador de Sturm-Liouville $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ con la condición de contorno (V.4.32), y

$$X(x) = A\cos(\frac{n\pi}{L}x)$$

son las correspondientes autofunciones. Poseen n nodos $x_m = (\frac{1}{2} + m)L/n$, $m = 0, \ldots, n-1$, en los que $X(x_m) = 0$. La solución particular para $n \neq 0$ es, pues,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \cos(\frac{n\pi}{L}x)[a_n\cos(\frac{n\pi v}{L}t) + b_n\sin(\frac{n\pi v}{L}t)] \\ &= \tfrac{1}{2}\{a_n[\cos[k_n(x-vt)] + \cos[k_n(x+vt)]] \\ &\quad + b_n[\sin[k_n(x+vt)] - \sin[k_n(x-vt)]]\}\,, \end{aligned}$$

con $k_n = n\pi/L$. Si $n = 0$,

$$u(x,t) = a + bt\,.$$

La solución *general* es

$$u(x,t) = \tfrac{1}{2}(a_0 + b_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{n\pi}{L}x)[a_n \cos(\frac{n\pi v}{L}t) + b_n \sin(\frac{n\pi v}{L}t)]\,. \quad \text{(V.4.33)}$$

Se trata, en este caso, de una función par con respecto a $x = 0$ y periódica con período $2L$.

Si $u(x,0) = \phi(x), \;\; u_t(x,0) = \psi(x)$, entonces

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)\,, \\ \psi(x) &= \tfrac{1}{2}b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi v}{L} b_n \cos(\frac{n\pi}{L}x),\,, \end{aligned}$$

que representan el desarrollo de medio rango en serie de cosenos de $\phi(x)$ y $\psi(x)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L \phi(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx \\ b_n &= \frac{2}{n\pi v}\int_0^L \psi(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx, \quad b_0 = \frac{2}{L}\int_0^L \psi(x)dx\,. \end{aligned}$$

Función respuesta

La función respuesta $K_{NN}(x,x',t)$ se obtiene para $\phi(x) = 0$, $\psi(x) = \delta(x - x')$:

$$a_n = 0, \quad b_0 = \frac{2}{L}, \;\; b_n = \frac{2}{n\pi v}\cos(\frac{n\pi}{L}x')\,,$$

de modo que

$$K_{NN}(x,x',t) = \frac{t}{L} + \frac{2}{n\pi v}\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{n\pi}{L}x')\sin(\frac{n\pi v}{L}t)\,.$$

La solución anterior para $u(x,0) = \phi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ puede, nuevamente, escribirse como en (V.4.31).

V.4.6.3. Función de Green causal para una cuerda finita

La solución de la ecuación inhomogénea

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)\,, \qquad \text{(V.4.34)}$$

con $u(x,t) = 0$ antes de la acción de la fuerza y $u(0,t) = u(L,t) = 0$, puede expresarse como

$$u(x,t) = \int_0^L dx' \int_{-\infty}^{\infty} G_{DD}(x,x',t-t') f(x',t') dt'\,, \qquad \text{(V.4.35)}$$

donde

$$G_{DD}(x,x',t) = K_{DD}(x,x',t) H(t)$$

es la función de Green causal. Podemos llegar a este resultado directamente, notando que G_{DD} satisface la ecuación

$$G_{DD_{tt}}(x,x',t) - v^2 G_{DD_{xx}}(x,x',t) = \delta(x-x')\delta(t)$$

para $x, x' \in (0,L)$, conjuntamente con la condición de contorno respectiva ($G_{DD}(0,x',t) = G_{DD}(L,x',t) = 0$ para una cuerda finita con extremos fijos).

El resultado (V.4.35) puede ser también obtenido desarrollando $f(x,t)$ y $u(x,t)$ en serie de Fourier con respecto a x. En el caso con extremos fijos,

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin(\frac{n\pi}{L}x)\,, \\ u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(\frac{n\pi}{L}x)\,, \end{aligned} \qquad \text{(V.4.36)}$$

con

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x,t) \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx\,, \\ c_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L u(x,t) \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx\,. \end{aligned}$$

Obtenemos, también,

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c''_n(t) \sin(\frac{n\pi}{L}x)\,.$$

Además, si $u_{xx}(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(t)\sin(\frac{n\pi}{L}x)$, entonces

$$\begin{aligned}b_n(t) &= \frac{2}{L}\int_0^L u_{xx}(x,t)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx\\ &= \frac{2}{L}\{u_x(x,t)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\big|_0^L - \frac{n\pi}{L}\int_0^L u_x(x,t)\cos(\frac{n\pi}{L}x)dx\}\\ &= \frac{2}{L}\{-\frac{n\pi}{L}u(x,t)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\big|_0^L - (\frac{n\pi}{L})^2\int_0^L u(x,t)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx\}\\ &= \frac{2n\pi}{L^2}[u(0,t)-(-1)^n u(L,t)] - (\frac{n\pi}{L})^2 c_n(t)\,. \qquad \text{(V.4.37)}\end{aligned}$$

Por lo tanto, *si* $u(x,t)$ *satisface la condición de contorno homogénea* $u(0,t)=u(L,t)=0 \Rightarrow b_n(t)=-(\frac{n\pi}{L})^2c_n(t)$, tal como se obtendría al derivar dos veces con respecto a x el desarrollo (V.4.36).

Reemplazando estos resultados en (V.4.34) se obtiene, finalmente, una ecuación diferencial ordinaria para $c_n(t)$,

$$\frac{d^2c_n}{dt^2}+(\frac{n\pi v}{L})^2c_n=f_n(t)\,,$$

cuya solución es (recordar que la función de Green para esta ecuación es $g(t)=\frac{1}{k}\sin(kt)H(t)$, con $k=\frac{n\pi v}{L}$, que satisface $g(0)=0$, $g'(0)=1$)

$$\begin{aligned}c_n(t) &= \frac{L}{n\pi v}\int_{-\infty}^{\infty}\sin[\frac{n\pi v}{L}(t-t')]H(t-t')f_n(t')dt'\\ &= \frac{2}{n\pi v}\int_0^L dx'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\sin[\frac{n\pi v}{L}(t-t')]H(t-t')\sin(\frac{n\pi}{L}x')f(x',t')\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(t)\sin(\frac{n\pi}{L}x)=\int_0^L dx'\int_{-\infty}^{\infty}dt' G_{DD}(x,x',t-t')f(x',t')\,. \qquad \text{(V.4.38)}$$

Problema sugerido V.4.2: Resolver el caso de la cuerda finita con extremos libres.

V.4.6.4. Condiciones de contorno inhomogéneas

Consideremos ahora la ecuación homogénea (V.4.27) con la condición de contorno no homogénea

$$u(0,t)=\mu_0(t),\quad u(L,t)=\mu_L(t)\,. \qquad \text{(V.4.39)}$$

Si $\mu_0(t)$ y $\mu_L(t)$ son constantes o dependen, a lo sumo, linealmente de t el problema puede resolverse trivialmente:

$$u_0(x,t)=\mu_0(t)+x(\mu_L(t)-\mu_0(t))/L$$

es, en esta situación, una solución de (V.4.27) que satisface la condición de contorno (V.4.39). Por lo tanto, la solución general será $u(x,t) = u_0(x,t)+u_1(x,t)$, donde $u_1(x,t)$ es una solución de (V.4.27) que satisface la condición de contorno *homogénea* (V.4.28).

Si la dependencia no es lineal en t o constante, podemos igualmente escribir $u(x,t) = u_0(x,t) + u_1(x,t)$, donde $u_1(x,t)$ satisfará la condición de contorno homogénea (V.4.28) y la ecuación de onda *inhomogénea* (V.4.34), con $f(x,t) = -\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2}$. El problema puede luego resolverse como en la sección anterior utilizando la función de Green.

Otra forma de proceder es proponer, nuevamente, una expansión (V.4.36) y utilizar el resultado (V.4.37), donde aparecen naturalmente $u(0,t)$, $u(L,t)$. Se obtiene así

$$\frac{d^2c_n}{dt^2} + (\frac{n\pi v}{L})^2 c_n = \frac{2n\pi v^2}{L^2}[\mu_0(t) - (-1)^n\mu_L(t)]\,,$$

de donde

$$c_n(t) \;=\; \frac{2v}{L}\int_{-\infty}^{\infty}\sin[\frac{n\pi v}{L}(t-t')]H(t-t')[\mu_0(t') - (-1)^n\mu_L(t')]dt'\,.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(\frac{n\pi}{L}x \\ &= -v^2\int_{-\infty}^{\infty}[G_{DD'_x}(x,L,t-t')\mu_L(t') - G_{DD'_x}(x,0,t-t')\mu_0(t')]dt'\,, \end{aligned} \quad (\text{V.4.40})$$

donde $G_{DD'_x}(x,x_0,t) \equiv \frac{\partial}{\partial x'}G_{DD}(x,x',t)|_{x'=x_0}$. La solución queda, así, expresada directamente en términos de $\mu_0(t)$, $\mu_L(t)$, y las derivadas de la función de Green correspondiente a condiciones de contorno homogéneas del mismo tipo, evaluadas en los extremos.

V.4.6.5. Energía de la cuerda finita con extremos fijos

Consideremos, por simplicidad, el caso de extremos fijos. La energía del modo normal (V.4.29) es

$$\begin{aligned} E &= \frac{\rho}{2}\int_0^L [u_t^2(x,t) + v^2u_x^2(x,t)]dx \\ &= \frac{\rho}{2}A_n^2(\frac{n\pi v}{L})^2\int_0^L \sin^2(\frac{n\pi}{L}x)dx = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}\rho L(\frac{n\pi v}{L})^2A_n^2]\,. \end{aligned} \quad (\text{V.4.41})$$

El último término entre corchetes es la energía $E_n = \frac{1}{2}m\omega_n^2A_n^2$ de un oscilador de masa $m = \rho L$, frecuencia $\omega_n = n\pi v/L$ y amplitud A_n. La energía del modo normal es, entonces, la *mitad* de la energía del oscilador correspondiente con amplitud máxima A_n (lograda en el punto medio entre dos nodos).

Debido a la *ortogonalidad* de los modos normales, la energía de la solución general (V.4.30) de la ecuación homogénea (V.4.27) será

$$E = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\rho L(\frac{n\pi v}{L})^2 A_n^2 = \frac{1}{4}m\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2 A_n^2\,. \qquad \text{(V.4.42)}$$

Problema sugerido V.4.3:

a) Probar el resultado anterior. b) Encontrar la expresión de la energía para el caso de extremos libres.

V.5. Difusión en una dimensión espacial

V.5.1. Generalidades

El ejemplo más importante de ecuación parabólica es la llamada ecuación de difusión. La necesidad de resolver esta ecuación surge en una gran variedad de situaciones físicas asociadas a fenómenos irreversibles que van desde la descripción de los cambios en concentración de una sustancia en solución hasta la evolución de la temperatura en un material que conduce calor. Tomaremos este último ejemplo como hilo conductor de esta sección. Si bien trataremos aquí el caso de una dimensión espacial, resulta natural empezar por derivar la ecuación en el caso general, que será luego retomado en la sección V.7.

Sea $u(\boldsymbol{r},t)$ la temperatura de un material conductor con calor específico c en una región simplemente conexa R con borde S. Teniendo en cuenta que el flujo de calor por unidad de área a través de una superficie está dado por la ley de Fourier: $\boldsymbol{J} = -\kappa\nabla u(\boldsymbol{r},t)$, la conservación del calor en presencia de una fuente de calor $j(\boldsymbol{r},t)$ implica la ecuación

$$\frac{d}{dt}\int_R \rho c u(\boldsymbol{r},t)dV = \kappa\int_S \nabla u(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{A} + \int_R j(\boldsymbol{r},t)dV\,. \qquad \text{(V.5.1)}$$

A su vez, esta ecuación puede reescribirse, teniendo en cuenta el teorema de Green (ver Apéndice B) y el hecho de que debe ser válida para cualquier región interna R del material, como la ecuación diferencial

$$u_t(\boldsymbol{r},t) - \alpha\Delta u(\boldsymbol{r},t) = f(\boldsymbol{r},t)\,,$$

donde $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ es el laplaciano y $\alpha = \kappa/(\rho c) > 0$, $f = j/(\rho c)$. Esta ecuación se denomina ecuación general de difusión y es una ecuación diferencial lineal de tipo parabólico. En ausencia de fuentes se obtiene la ecuación de difusión homogénea

$$u_t(\boldsymbol{r},t) - \alpha\Delta u(\boldsymbol{r},t) = 0\,.$$

Ambas ecuaciones son, obviamente, también válidas en un número n arbitrario de dimensiones espaciales. Comenzaremos estudiando el caso de una dimensión.

V.5.2. Evolución de la temperatura en una barra infinita

Consideremos la ecuación

$$u_t - \alpha u_{xx} = 0\,, \qquad \alpha > 0 \tag{V.5.2}$$

para la temperatura $u(x,t)$ en una barra infinita con la condición inicial

$$u(x,0) = \phi(x)\,. \tag{V.5.3}$$

Obsérvese que, a diferencia de lo que ocurre en el caso de las vibraciones de una cuerda, aquí tenemos una ecuación de primer orden en derivadas temporales y, por lo tanto, basta especificar sólo una condición inicial para realizar su integración. Por supuesto, en el caso de barras semi-infinitas o finitas serán necesarias, además, condiciones de contorno.

Multiplicando la ecuación (V.5.2) por e^{-ikx} e integrando con respecto a x, se obtiene

$$U_t(k,t) + \alpha k^2 U(k,t) = 0\,, \tag{V.5.4}$$

donde

$$U(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(x,t) dx$$

es la transformada de Fourier (TF) de $u(x,t)$ respecto de x. La ecuación (V.5.4) es una ecuación diferencial *ordinaria* en t para U, cuya solución para $t > 0$ es

$$U(k,t) = e^{-\alpha k^2 t} U(k,0)\,, \tag{V.5.5}$$

donde $U(k,0)$ es la TF de $u(x,0)$.

Utilizando, ahora, las propiedades de la TF (ver IV) obtenemos, luego de efectuar la transformación inversa,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} U(k,t) dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-x',t) u(x',0) dx'\,, \end{aligned} \tag{V.5.6}$$

con

$$\begin{aligned} K(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \frac{e^{-\alpha k^2 t}}{\sqrt{2\pi}} dk \\ &= \frac{e^{-x^2/(4\alpha t)}}{\sqrt{4\pi\alpha t}}, \quad t > 0\,. \end{aligned} \tag{V.5.7}$$

$K(x-x',t)$ es la función respuesta o núcleo de la ecuación de difusión del calor en la barra infinita y representa la temperatura $u(x,t)$ en la posición x y tiempo $t > 0$ para una temperatura inicial $u(x,0) = \delta(x-x')$, localizada en $x = x'$:

$$\begin{aligned} K_t(x-x',t) - \alpha K_{xx}(x-x',t) &= 0\,, \\ \lim_{t\to 0^+} K(x-x',t) &= \delta(x-x')\,. \end{aligned} \tag{V.5.8}$$

En el caso de la barra infinita, en que no existen puntos singularizados por la imposición de condiciones de contorno, el núcleo de la ecuación de calor depende sólo de la diferencia $x - x'$ ya que, en este caso, la ecuación (V.5.2) es invariante frente a traslaciones espaciales. La solución general (V.5.6) puede entenderse, entonces, como la suma de soluciones elementales $K(x - x', t)$ moduladas por el factor $u(x', 0)$, dado que $u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x')u(x', 0)dx'$.

$K(x - x', t)$ es una Gaussiana centrada en $x = x'$ con desviación estándar $\sigma(t) = \sqrt{2\alpha t}$. Dado que la cantidad total de calor debe conservarse e, inicialmente, $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x')dx = 1$, se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, t)dx = 1$$

$\forall\ t \geq 0$, como puede verificarse directamente. Al aumentar t, la distribución $K(x, t)$ se "achata", aunque conserva su área. Para $x \neq 0$ fijo, $K(x, t)$ posee un máximo en $t_0 = x^2/(2\alpha)$, con $K(x, t_0) = 1/(\sqrt{2\pi e}x)$, disminuyendo luego como $t^{-1/2}$ para $t \to \infty$. Notemos también que, si $t > 0$, $K(x, t) \neq 0\ \forall\ x \neq 0$, lo que indica una velocidad infinita de transmisión del calor. La ecuación (V.5.2) es claramente no relativista, es decir no invariante frente a transformaciones de Lorentz (en contraposición con la ecuación de ondas). No obstante, $K(x, t)$ es muy pequeño para $x \gg \sigma(t)$.

Problema sugerido V.5.1: Elaborar una simulación computacional que haga visible el comportamiento de $K(x, t)$ que acaba de describirse.

Ejemplo V.5.1: Si $u(x, 0) = A\cos(kx) = A\text{Re}[e^{ikx}] \Rightarrow$

$$u(x, t) = A\text{Re}[e^{ikx}e^{-\alpha k^2 t}] = A\cos(kx)e^{-\alpha k^2 t}\,,$$

resultado que puede obtenerse de (V.5.6)–(V.5.7) o directamente de (V.5.5), planteando $u(x, t) = e^{ikx}U(k, t)$. La solución general (V.5.6) es, pues, la "suma" de soluciones elementales para condiciones iniciales $u(x, 0) = U(k, 0)e^{ikx}$. Este ejemplo muestra también que oscilaciones espaciales iniciales de la temperatura decaen tanto más rápidamente al aumentar t cuanto mayor sea la frecuencia k. Si $k = 0$, $u(x, t) = A$, constante.

Ejemplo V.5.2: Si $u(x, 0) = Ae^{-x^2/r}/\sqrt{\pi r}$, $r > 0$ (distribución inicial gaussiana de temperaturas) $\Rightarrow$

$$u(x, t) = A\frac{e^{-x^2/(r+4\alpha t)}}{\sqrt{\pi(r + 4\alpha t)}} = AK(x, t + t_0)\,,\quad t_0 = \frac{r}{4\alpha}\,,$$

lo que puede obtenerse de (V.5.6) o, directamente, notando que $u(x, 0) = AK(x, t_0)$. La distribución de temperaturas permanece gaussiana $\forall\ t > 0$. Si $r \to 0^+$, $u(x, t) \to AK(x, t)$.

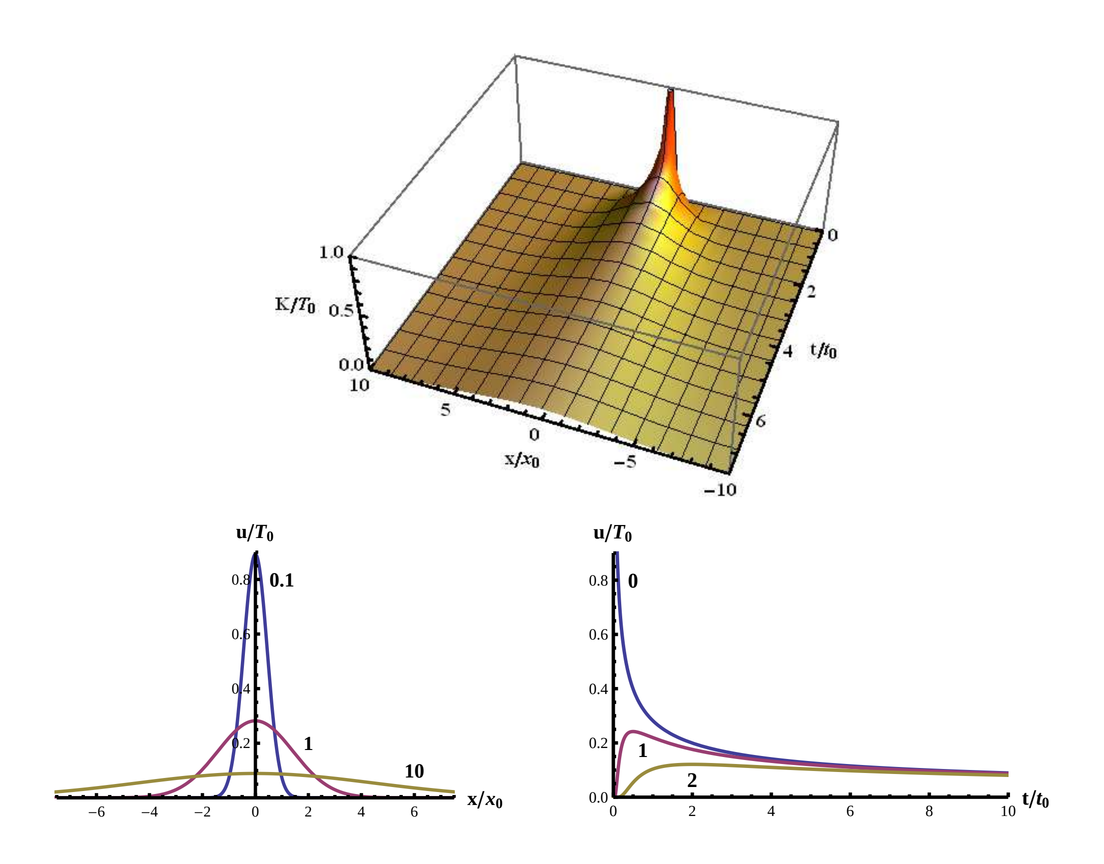


Figura 35: Gráfico de la función respuesta $K(x,t)$ de la ecuación de difusión en la barra infinita (t_0 y x_0 son unidades tales que $\alpha t_0/x_0^2 = 1$ y T_0 es la unidad de temperatura.). Abajo se muestran los perfiles en función de x/x_0 para tiempos fijos $t/t_0 = 0{,}1, 1$ y 10, y en función de t/t_0 para posiciones fijas $x/x_0 = 0, 1, 2$.

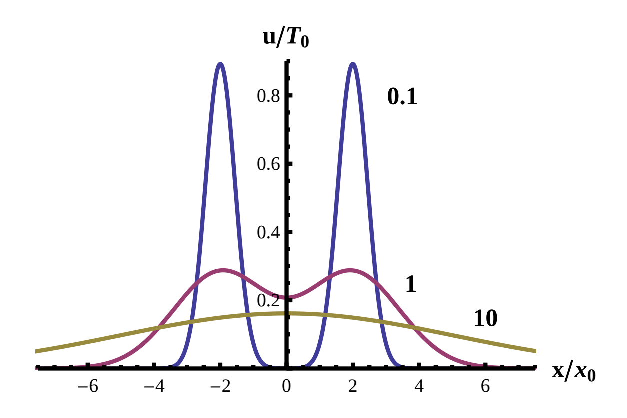


Figura 36: Perfil de la temperatura $u(x,t)$ en la barra infinita para temperatura inicial $u(x,0) = \delta(x-2x_0) + \delta(x+2x_0)$ a tiempos $t/t_0 = 0{,}1, 1$ y 10. Se observa que las irregularidades iniciales son fuertemente atenuadas al aumentar el tiempo, no quedando prácticamente indicios del doble pico inicial para tiempos grandes $t/t_0 \gg 1$.

V.5.3. Ecuación inhomogénea. Función de Green.

Consideremos, ahora, la ecuación inhomogénea

$$u_t - \alpha u_{xx} = f(x,t)\,.$$

La misma representa la distribución de temperaturas en una barra cuando existe una fuente externa que aporta una cantidad de calor $\rho c f(x,t)$ por unidad de tiempo, donde ρ es la densidad de la barra y c su conductividad térmica.

Procediendo como en el caso anterior, es decir, multiplicando por e^{-ikx} e integrando, obtenemos,

$$U_t(k,t) + \alpha k^2 U(k,t) = F(k,t)\,,$$

con $F(k,t)$ la TF de $f(x,t)$ con respecto a x. La solución de esta ecuación diferencial ordinaria en t es, para $U(k,-\infty)=0$,

$$U(k,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha k^2 (t-t')} H(t-t') F(k,t') dt'\,.$$

Aplicando, ahora, la transformada inversa se obtiene

$$u(x,t) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(x-x',t-t') f(x',t') dx' dt'\,, \qquad \text{(V.5.9)}$$

donde

$$G(x,t) \;=\; K(x,t)H(t) = \frac{e^{-x^2/(4\alpha t)}}{\sqrt{4\pi\alpha t}} H(t)\,. \qquad \text{(V.5.10)}$$

La función $G(x-x',t-t')$ es la función de Green de la ecuación del calor y representa la solución causal $u(x,t)$ para una inhomogeneidad puntual $f(x,t)=\delta(x-x')\delta(t-t')$:

$$G_t(x-x',t-t') - \alpha G_{xx}(x-x',t-t') = \delta(x-x')\delta(t-t')\,,$$

como puede comprobarse directamente utilizando (V.5.8) o (V.5.6).

La solución general (V.5.9) puede, nuevamente, entenderse como la suma de las soluciones elementales $G(x-x',t-t')$ moduladas por el factor $f(x',t')$, dado que $f(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x',t')\delta(x-x')\delta(t-t')dt'dx'$.

V.5.4. Barra semi-infinita con condición de contorno homogénea

Consideremos, ahora, el caso de una barra semi-infinita cuyo extremo se mantiene a temperatura nula a todo tiempo. Si la barra se extiende a los valores de x dados por $0 \leq x < \infty$, deberemos resolver la ecuación (V.5.2) en la region $x \geq 0$ con la condición inicial (V.5.3) y la condición de contorno

$$u(0,t) = 0, \quad \forall t > 0. \qquad \text{(V.5.11)}$$

Podríamos proceder como en el caso anterior, utilizando la transformada seno en lugar de la TF completa. No obstante, es equivalente, pero más cómodo y físico, utilizar el método de las imágenes. La condición (V.5.11) se puede simular completando la temperatura inicial $u(x,0)=\phi(x)$ en forma *impar* para $x<0$: $u(-x,0)=-u(x,0)$. En esta situación, utilizando la solución (V.5.6),

$$u(0,t)=\int_{-\infty}^{\infty}K(0-x',t)u(x',0)dx'=0\,,$$

por ser $u(x',0)$ *impar* y $K(-x',t)=K(x',t)$ *par* (con respecto a x'). Obtenemos, entonces,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty}K(x-x',t)u(x',0)dx'=\int_{0}^{\infty}K_D(x,x',t)u(x',0)dx'\,, && \text{(V.5.12)}\\ K_D(x,x',t) &= K(x-x',t)-K(x+x',t)\,, && \text{(V.5.13)}\end{aligned}$$

donde $K_D(x-x',t)$ es la función respuesta para la barra semi-infinita con la presente condición de contorno. Esta última no es otra cosa que la diferencia de las respuestas a fuentes puntuales en x' y en $-x'$. Notemos que $K_D(x,x',t)$ no es más una función de $x-x'$, ya que se ha perdido la invariancia traslacional. Tampoco se conserva la cantidad de calor $Q(x',t)\propto\int_{-\infty}^{\infty}K_D(x,x',t)dx$, ya que el sistema pierde calor en $x=0$. Tenemos, en cambio, $Q(x',t)\to 0$ para $t\to\infty$, como puede comprobarse fácilmente.

En forma análoga se procede para el caso inhomogéneo. Completando a $f(x,t)$ en forma impar con respecto a $x=0\ \forall\ t$ se obtiene

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty}G_D(x,x',t-t')f(x',t')dx'\right]dt'\,, \qquad \text{(V.5.14)}$$

con

$$G_D(x,x',t) = K_D(x,x',t)H(t)=G(x-x',t)-G(x+x',t)\,,$$

que representa la diferencia de las respuestas del sistema a inhomogeneidades puntuales en (x',t') y en $(-x',t')$. Aquí, K_D y G_D quedan definidas por

$$\begin{aligned} &K_{D_t}(x,x',t)-\alpha K_{D_{xx}}(x,x',t)=0,\quad x>0,x'>0,t>0\\ &\lim_{t\to 0^+}K_D(x,x',t)=\delta(x-x'),\quad K_D(0,x',t)=0 \end{aligned} \qquad \text{(V.5.15)}$$

$$\begin{aligned} G_{D\,t}(x,x',t)-\alpha G_{D_{xx}}(x,x',t) &= \delta(x-x')\delta(t-t'),\quad x>0,x'>0\\ G_D(0,x',t) &= 0\,. \end{aligned}$$

En forma similar se puede tratar la condición de contorno de Neumann

$$u_x(0,t)=0\,,$$

que corresponde a una barra térmicamente *aislada* en $x = 0$. En este caso, se debe completar la condición inicial y la inhomogeneidad en forma *par* con respecto a $x = 0$: $u(-x, 0) = u(x, 0)$, $f(-x, t) = f(x, t)$. Las soluciones se encuentran como en el caso anterior, reemplazando $K_D(x, x', t)$ y $G_D(x, x', t)$ por

$$\begin{aligned} K_N(x, x', t) &= K(x - x', t) + K(x + x', t) \\ G_N(x, x', t) &= K_N(x, x', t)H(t) = G(x - x', t) + G(x + x', t)\,, \end{aligned}$$

que representan ahora la suma de las respuestas a fuentes puntuales en en x' y en $-x'$ y que satisfacen las mismas ecuaciones anteriores pero con la condición de contorno $K_{N_x}(0, x', t) = 0$, $G_{N_x}(0, x', t) = 0$. No son funciones de $x - x'$, aunque en este caso se verifica

$$\int_0^\infty K_N(x, x', t)dx = 1\,,$$

$\forall\, t \geq 0$, ya que el sistema está aislado.

Problema sugerido V.5.2: Probar el resultado anterior.

V.5.5. Barra semi-infinita con condiciones de contorno inhomogéneas

V.5.5.1. Solución general

Resulta de gran interés físico resolver el problema de la determinación de la temperatura en una barra semi-infinita conociendo la temperatura en el origen como función del tiempo. Deberemos resolver, en este caso,

$$\begin{aligned} u_t - \alpha u_{xx} &= f(x, t)\,, \\ u(x, 0) &= 0\,, \quad 0 \leq x < \infty\,, \\ u(0, t) &= g(t) \quad t > 0\,. \end{aligned} \tag{V.5.16}$$

Nótese que, por continuidad, $g(0) = 0$. Nos limitaremos a considerar el caso de la ecuación homogénea, con distribución inicial de temperaturas nula. La linealidad de la ecuación diferencial, junto con la de las condiciones complementarias, nos permite hacerlo. Gracias a la validez de la propiedad de superposición, el problema completo se obtiene sumando al que trataremos aquí otros que ya hemos estudiado.

La inhomogeneidad en las condiciones de contorno puede ser trasladada, también gracias a la propiedad de superposición, a la ecuación diferencial, definiendo:

$$u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)\,,$$

de donde resulta que la función $v(x, t)$ satisface:

$$\begin{aligned} v_t - \alpha v_{xx} &= -\left[w_t(x, t) - \alpha w_{xx}(x, t)\right]\,, \\ v(x, 0) &= -w(x, 0) + u(x, 0) = -w(x, 0)\,, \quad 0 \leq x < \infty\,, \\ v(0, t) &= g(t) - w(0, t)\,, \quad t > 0\,. \end{aligned} \tag{V.5.17}$$

En el párrafo anterior, $w(x,t)$ es una función completamente arbitraria. Sin embargo, podemos elegirla como

$$w(x,t) = g(t)\,.$$

De este modo, $v(x,t)$ satisfará la condición de contorno homogénea en $x=0$, que sabemos resolver. Notar que, en el caso particular de $g(t)=T$ constante, lo que hemos hecho se reduce a separar la solución estacionaria, constante en toda la barra. Volviendo al caso general, sabemos que, en estas condiciones tenemos:

$$\begin{aligned} v_t - \alpha v_{xx} &= -\dot{g}(t)\,, \\ v(x,0) &= 0\,, \quad 0 \le x < \infty\,, \\ v(0,t) &= 0 \quad t > 0\,. \end{aligned} \tag{V.5.18}$$

Por lo tanto, usando la función de Green causal, se tiene

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \int_0^t \int_0^\infty dx'dt' K_D(x,x';t-t')\dot{g}(t') \\ &= -\int_0^\infty dx' g(t')K_D(x,x';t-t')\big]_{t'=0}^{t'=t} + \int_0^t \int_0^\infty dx'dt' \frac{\partial K_D(x,x';t-t')}{\partial t'} g(t') \\ &= \int_0^\infty dx' g(t')\left[\delta(x-x') - \delta(x+x')\right] + \int_0^t \int_0^\infty dx'dt' \frac{\partial K_D(x,x';t-t')}{\partial t'} g(t')\,, \end{aligned}$$

donde hemos integrado por partes. Ahora, teniendo en cuenta que la segunda delta de Dirac está evaluada en un punto exterior a su soporte, se verifica:

$$v(x,t) = -g(t) + \int_0^t \int_0^\infty dx'dt' \frac{\partial K_D(x,x',t-t')}{\partial t'} g(t')\,. \tag{V.5.19}$$

Volviendo a la determinación de $u(x,t)$, tenemos:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^\infty dx'dt' \frac{\partial K_D(x,x,t-t')}{\partial t'} g(t')\,. \tag{V.5.20}$$

Utilizando la ecuación que satisface el núcleo de calor, que $\frac{\partial K_D(x,x,t-t')}{\partial t} = -\frac{\partial K_D(x,x,t-t')}{\partial t'}$ y que $\frac{\partial^2 K_D}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 K_D}{\partial x'^2}$, encontramos, finalmente:

$$u(x,t) = -\alpha \int_0^t dt' g(t') \frac{\partial K_D(x;t-t')}{\partial x'} = -2\alpha \int_0^t dt' g(t') \frac{\partial K(x;t-t')}{\partial x}\,, \tag{V.5.21}$$

donde $K_D(x;t-t')$ es el núcleo de calor de una barra semi-infinita sujeta, en sus extremos, a la correspondiente condición de contorno homogénea y $K(x;t-t')$ es el núcleo de calor de una barra infinita.

Se ve de la última expresión que la respuesta a una condición de contorno impulsiva $u(0,t)=\delta(t)$ es proporcional a la derivada del núcleo de calor con respecto a la variable x.

V.5.5.2. Problemas sin condición inicial y propagación de variaciones periódicas de temperatura en un extremo

Un problema interesante por sus aplicaciones es el de una barra semi-infinita con dada temperatura en su extremo, cuando se la estudia a un tiempo suficientemente grande con respecto al inicial (tiempo t_0 en que se inició el proceso de difusión). En este caso, puede reemplazarse la condición inicial por la condición de acotación y tener en cuenta sólo el efecto de la condición de contorno. Un ejemplo de aplicación de este caso es la determinación del potencial en una línea de transmisión con pérdidas [18]. Otro, es la determinación de la temperatura por debajo de la superficie terrestre a una profundidad x, conociendo la temperatura en la superficie. Consideremos la ecuación

$$u_t - \alpha u_{xx} = 0, \qquad x > 0\,, \tag{V.5.22}$$

con la condición de acotación $|u(x,t)| < C_1$ para $x \to \infty$ y $|u(x,t)| < C_2$ para $t \to -\infty$ y la condición de contorno

$$u(0,t) = g(t)\,,$$

donde $g(t)$ permanece, también, acotada cuando $t \to -\infty$. Sabemos, en base a lo estudiado hasta ahora, que la solución, válida para todo $t \geq t_0$ está dada por

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\int_0^\infty dx'\varphi(x')K_D(x';t-t_0) - 2\alpha \int_{t_0}^t dt' g(t') \frac{\partial K(x';t-t')}{\partial x} = \\ &= I_1 + I_2\,, \end{aligned} \tag{V.5.23}$$

donde $\varphi(x)$ es la distribución inicial de temperatura en la barra. Nos interesa el límite en el cual $t_0 \to -\infty$ de esta solución. Es fácil ver que, si se cumplen las condiciones de acotación, la primera integral (que llamaremos I_1) $\to 0$ en dicho ímite. En efecto, se cumple

$$\begin{aligned} |I_1| < C_1 \int_0^\infty dx' \frac{1}{\sqrt{t-t_0}} \left[|e^{\frac{-(x-x')^2}{4\alpha(t-t_0)}} - e^{\frac{-(x+x')^2}{4\alpha(t-t_0)}}| \right] \\ = \frac{2C_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4\alpha(t-t_0)}}} dz e^{-z^2}\,, \end{aligned}$$

donde hemos hecho un cambio de variable conveniente en la integral.

Dado que esta última integral tiende a cero cuando $t_0 \to -\infty$, la contribución de I_1 se anula en ese límite. En el mismo límite, la solución (V.5.23) se reduce a

$$u(x,t) = -2\alpha \int_{-\infty}^t dt' g(t') \frac{\partial K_D(x;t-t')}{\partial x} = -2\alpha \int_{-\infty}^t dt' g(t') \frac{\partial k(x;t-t')}{\partial x}\,. \tag{V.5.24}$$

A continuación, analizaremos otras dos formas alternativas de obtener este mismo resultado. Consideremos, primero, el caso más simple en que

$$g(t) = T_0 \cos(\omega t) = T_0\,\mathrm{Re}[e^{i\omega t}]\,.$$

Proponiendo una solución del tipo

$$u(x,t) = T_0 e^{i\omega t} v(x)$$

se encuentra que $v(x)$ satisface

$$i\omega v - \alpha v'' = 0\,,$$

cuya solución es

$$v(x) = A_1 e^{\sqrt{i\omega/\alpha}x} + A_2 e^{-\sqrt{i\omega/\alpha}x}\,,$$

con $\sqrt{i\omega/\alpha} = e^{i\pi/4}\sqrt{\omega/\alpha} = (1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}$. La condición $|v(\infty)| < \infty$ implica

$$v(x) = \begin{cases} A_2 e^{-x(1+i)\gamma(\omega)} & \omega > 0 \\ A_1 e^{-x(1-i)\gamma(\omega)} & \omega < 0 \end{cases}\,, \quad \gamma(\omega) = \sqrt{\frac{|\omega|}{2\alpha}}\,. \tag{V.5.25}$$

Por lo tanto, si $\omega > 0$, la solución que satisface la condición de contorno es

$$u(x,t) = T_0 e^{-x\gamma(\omega)(1+i)+i\omega t}\,, \tag{V.5.26}$$

con

$$\mathrm{Re}[u(x,t)] = T_0 e^{-\gamma(\omega)x}\cos(\omega t - \gamma(\omega)x)\,, \tag{V.5.27}$$

que indica una disminución exponencial de las oscilaciones térmicas que ocurren en la superficie (ver Figura 36). La longitud de penetración $d(\omega) = 1/\gamma(\omega) = \sqrt{2\alpha/\omega}$ ***disminuye*** al aumentar ω. Surge, además, un retraso $\delta t = x\gamma(\omega)/\omega = x/\sqrt{2\alpha\omega}$ en las oscilaciones a una profundidad x, que corresponde a una "velocidad de propagación" $\sqrt{2\alpha\omega}$. Notemos finalmente que, si $\omega = 0$, $\Rightarrow u(x,t) = G$ (solución estacionaria constante).

La solución *general* para una condición de contorno arbitraria puede hallarse como suma de las soluciones anteriores, desarrollando a $g(t) = u(0,t)$ en integral de Fourier:

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{i\omega t}d\omega, \quad G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt\,.$$

Efectuando la TF de la ecuación (V.5.22) con *respecto* a t, se obtiene

$$i\omega U(x,\omega) - \alpha U_{xx}(x,\omega) = 0\,, \tag{V.5.28}$$

con

$$U(x,\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega t}dt$$

la TF de $u(x,t)$ respecto de t, que satisface $U(0,\omega) = G(\omega)$. La solución de (V.5.28) acotada para $x \to \infty$ es, utilizando (V.5.25),

$$U(x,\omega) = G(\omega)e^{-x\gamma(\omega)(1+iSg(\omega))}\,,$$

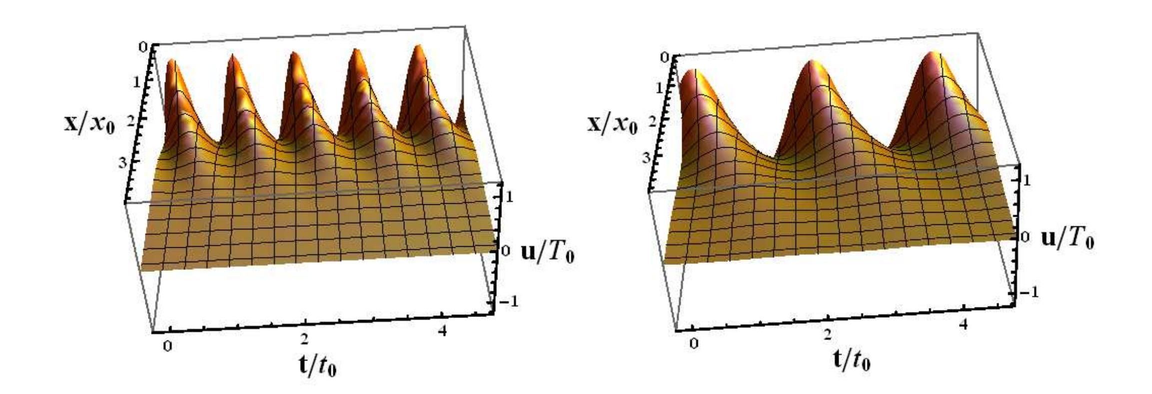


Figura 37: Perfil de la temperatura $u(x,t)$ en una barra semi-infinita con la condición de contorno $u(0,t) = T_0\cos(\omega t)$, para $\omega = \omega_0 = 2\pi/t_0$ (izquierda) y $\omega = \omega_0/2$ (derecha), (con x_0 tal que $\alpha t_0/x_0^2 = 1$). Se observa que las variaciones de temperatura en la superficie disminuyen exponencialmente con la profundidad x. Al disminuir la frecuencia, aumenta tanto la longitud de penetración como el retraso de la oscilación a una cierta profundidad x fija.

donde $Sg(\omega)$ es el signo de ω. Antitransformando esta ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} U(x,\omega)e^{i\omega t}d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} G_{DI}(x,t-t')g(t')dt'\,, \qquad (\text{V.5.29}) \\ G_{DI}(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x\gamma(\omega)(1+iSg(\omega))+i\omega t}}{\sqrt{2\pi}}d\omega \\ &= \frac{x}{t}\frac{e^{-x^2/(4\alpha t)}}{\sqrt{4\pi\alpha t}}H(t)\,. \qquad (\text{V.5.30}) \end{aligned}$$

$G_{DI}(x,t-t')$ representa la solución para la condición de borde puntual $u(0,t) = \delta(t-t')$ y depende de la diferencia $t-t'$. Para $t>0$, $G_{DI}(x,t)$ posee, como función de x, un máximo en $x_0 = \sqrt{2\alpha t}$, con $G_{DI}(x_0,t) = 1/(\sqrt{2\pi e}t)$.

Notemos que

$$G_{DI}(x,t) = \alpha\frac{\partial G_D(x,x',t)}{\partial x'}|_{x'=0} = -2\alpha\frac{\partial G(x,t)}{\partial x}\,, \qquad (\text{V.5.31})$$

y que (V.5.29) coincide con la expresión antes obtenida en (V.5.24).

Resolución por transformada seno (TS):

Otra forma de llegar al mismo resultado es mediante la TS en la variable x. En primer

lugar, para una función f con $f(\infty)=0$, obtenemos, integrando por partes dos veces,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f''(x)\sin(kx)\,dx &= f'(x)\sin(kx)|_0^\infty - k\int_0^\infty f'(x)\cos(kx)dx\\ &= -kf(0)\cos(kx)|_0^\infty - k^2\int_0^\infty f(x)\sin(kx)dx\,.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si $F_s(k)$ es la TS de $f(x)$, la TS de $f''(x)$ es

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f''(x)\sin(kx)dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}kf(0) - k^2F_s(k)\,.$$

Si $f(0)=0$, que es la condición de contorno natural para el desarrollo en las funciones $\sin(kx)$, el resultado es simplemente $-k^2F_s(k)$, y puede obtenerse directamente derivando la expresión inversa

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(k)\sin(kx)dk\,.$$

Pero, si $f(0)\neq 0$, aparece un término adicional. Por lo tanto, si efectuamos la TS de la ecuación (V.5.22) (es decir, si multiplicamos por $\sin(kx)$ e integramos), obtenemos

$$U_{s\,t}(k,t) + k^2\alpha U_s(k,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha k g(t)\,, \qquad \text{(V.5.32)}$$

donde $g(t)=u(0,t)$ y

$$U_s(x,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(x,t)\sin(kx)dx$$

es la TS de $u(x,t)$ con respecto a x. Si $U_s(k,-\infty)=0$, la solución de (V.5.32) es

$$U_s(k,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\alpha k\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha k^2(t-t')}H(t-t')g(t')dt'\,.$$

Efectuando la transformación inversa, y notando que

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\alpha k^2 t}k\sin(kx)dk &= \frac{-\partial}{\partial x}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty e^{-\alpha k^2 t}e^{ikx}dk\\ &= -2\frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-x^2/(4\alpha t)}}{\sqrt{4\pi\alpha t}}\end{aligned} \qquad \text{(V.5.33)}$$

se obtiene nuevamente el resultado (V.5.23) o, equivalentemente, (V.5.29).

Problema sugerido V.5.3: Encontrar la solución correspondiente a un flujo dado $u_x(0,t)=g(t)$ en el origen, utilizando la transformada coseno $F_c(k)$ (ver tabla siguiente).

	$f(x)$	$F_s(k)$	$F_c(k)$
1	$f'(x)$	$-kF_c(k)$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)+kF_s(k)$
2	$f''(x)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}}kf(0)-k^2F_s(k)$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0)-k^2F_c(k)$

V.5.6. Teorema del máximo y condiciones de contorno en barras de longitud finita

Comenzaremos por demostrar el siguiente teorema, que usaremos después para demostrar la unicidad de la solución del problema unidimensional de difusión con determinadas condiciones de contorno.

Teorema V.5.1 *Sea $u(x,t)$ solución de la ecuación de calor homogénea, $u_t - \alpha u_{xx} = 0$, definida en $R = (x,t) : a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T$. Sea Γ la unión de la base del rectángulo, $(x,0) : a \leq x \leq b$ y sus lados verticales $(a,t) : 0 \leq t \leq T, (b,t) : 0 \leq t \leq T$. Entonces,*

$$max\{u(x,t) : (x,t) \in R\} = max\{u(x,t) : (x,t) \in \Gamma\}\,.$$

$$min\{u(x,t) : (x,t) \in R\} = min\{u(x,t) : (x,t) \in \Gamma\}\,.$$

Demostración:

Consideremos, primero, una función auxiliar $v(x)$, tal que $v_t - \alpha v_{xx} < 0$ en R. Supongamos que $v(x,t)$ tiene un máximo en (x_0,t_0), que no pertenece a Γ. Si el punto no pertenece al lado superior del rectángulo, v debe satisfacer, en ese punto,

$$v_t(x_0,t_0) = 0, \quad v_{xx}(x_0,t_0) \leq 0\,,$$

que resulta incompatible con la inecuación diferencial satisfecha por v. Si, en cambio, el máximo se alcanzase sobre el lado superior ($(x,T) : a \leq x \leq b$), entonces, para (x_0,t_0) muy próximo a ese borde, se tendría

$$v_t(x_0,t_0) \geq 0, \quad v_{xx}(x_0,t_0) \leq 0\,,$$

de modo que también se contradiría la inecuación satisfecha por $v(x,t)$.

Ahora, si consideramos $u(x,t)$ tal que satisface $u_t - \alpha u_{xx} = 0$, podemos construir $v(x,t) = u(x,t) + \epsilon x^2$, con $\epsilon > 0$, que satisface $v_t - \alpha v_{xx} - 2\epsilon a^2 < 0$ y, por lo tanto, si M es el máximo valor de $u(x,t)$ sobre Γ, se tiene

$$v(x,t) \leq M + \epsilon x^2 \leq M + \epsilon b^2$$

tanto en el interior como en Γ. Como consecuencia,

$$u(x,t) = v(x,t) - \epsilon x^2 \leq v(x,t) \leq M + \epsilon b\,.$$

Dado que ϵ es arbitrario, resulta $u(x,t) \leq M$ en toda la región. Por supuesto, lo mismo ocurre con los mínimos. En efecto, si $u(x,t)$ satisface la ecuación diferencial, $-u(x,t)$ también lo hace y los mínimos de una son los máximos de la otra.

□

Este teorema tiene una interpretación simple: si no hay fuentes de calor en la barra, la temperatura no puede estar por encima del máximo entre las temperaturas iniciales y las temperaturas en los extremos. Lo mismo ocurre con los mínimos.

A partir de este teorema es muy fácil demostrar la unicidad de la solución de la ecuación de calor (tanto homogénea como inhomogénea), para una dada condición inicial $u(x,0) = \varphi(x)$ y con condiciones de contorno Dirichlet como las ya estudiadas en el caso de la ecuación de la cuerda vibrante. En efecto, proponiendo la existencia de dos soluciones tendremos que la diferencia de ambas, $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$ satisfará la ecuación homogénea y, además, será nula en todo Γ. En consecuencia, deberá ser menor o igual que cero. Por la segunda parte del teorema anterior deberá, también, ser mayor o igual que cero. Por lo tanto, debe ser $w = 0$ en toda la región R, contradiciendo la hipótesis de existencia de dos soluciones distintas.

V.5.7. Evolución de la temperatura en barras finitas

Estudiemos la evolución de la temperatura $u(x,t)$ en una barra finita de longitud L, con condiciones de contorno

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

y condición inicial

$$u(x,0) = \phi(x)\,.$$

Podemos plantear $u(x,t) = X(x)T(t)$ en la ecuación

$$u_t - \alpha u_{xx} = 0\,,$$

obteniendo

$$\frac{T'}{\alpha T} = \frac{X''}{X} = -k^2\,,$$

que conduce a $T(t) = T(0)e^{-\alpha kt}$ y $X(x) = A\cos kx + B\sin kx$ para $k \neq 0$ (para $k = 0$ se obtiene, en cambio, $X(x) = A + Bx$, que se anula idénticamente al imponer las condiciones de contorno). La condición de contorno implica $X(0) = X(L) = 0$, en cuyo caso $A = 0$ y $k = n\pi/L$, $n = 1, 2, \ldots$. Se obtiene entonces la solución producto

$$X_n(x)T_n(t) = c_n e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t}\sin(n\pi x/L)$$

y la solución general

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi/L)^2\alpha t}\sin(n\pi x/L)\,.$$

La condición inicial implica que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x/L) = \phi(x)\,,$$

expresión que constituye el desarrollo en serie de medio rango en senos de $\phi(x)$ y determina los coeficientes c_n:

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L \sin(\frac{n\pi}{L}x)\phi(x)dx\,.$$

El resultado final puede expresarse como

$$u(x,t) = \int_0^L K(x,x',t)\phi(x')dx'\,,$$

donde

$$K(x,x',t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n\pi/L)^2\alpha t}\sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{n\pi}{L}x')$$

representa la función respuesta de la ecuación de difusión en la barra finita con las condiciones de contorno anteriores. La condición inicial es, por lo tanto, naturalmente descompuesta en “modos normales” que exhiben un decaimiento exponencial $\propto e^{-\alpha(n\pi/L)^2 t}$. Para tiempos grandes, únicamente el modo simétrico fundamental ($\sin(\pi x/L)$) permanecerá visible (si $c_1 \neq 0$), con una amplitud $c_1 e^{-(\pi/L)^2\alpha t}$.

Notemos, también, que el problema con temperatura fija en los bordes,

$$u(0,t) = T_0,\;\; u(L,T) = T_L\,,$$

donde T_0 y T_L son independientes de t, puede reducirse al problema anterior si reemplazamos

$$u(x,t) = w(x,t) + T_0 + \frac{x}{L}(T_L - T_0)\,.$$

La función lineal constante de la derecha se encarga de garantizar que se cumpla la condición de contorno y satisface exactamente la ecuación de difusión homogénea (es una solución estacionaria), por lo que $w(x,t)$ satisface también la ecuación de difusión homogénea, pero con condiciones de contorno *homogéneas* ($w(0,t) = w(L,t) = 0$). Entonces, $w(x,t)$ estará dada por la solución anterior (con $w(x,0) = u(x,0) - (T_0 + \frac{x}{L}(T_L - T_0))$. En este caso

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = T_0 + \frac{x}{L}(T_L - T_0)\,.$$

Se pueden emplear métodos análogos para estudiar la difusión del calor en otras situaciones tales como barras finitas con fuentes de calor, barras aisladas, regiones bidimensionales, etc. En V.7 presentaremos la función de Green para una región general.

Problema sugerido V.5.4: Mostrar que la temperatura $u(x,t)$ en una barra finita de longitud L térmicamente aislada ($u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$) con la condición inicial $u(x,0) = \phi(x)$, es de la forma

$$u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi/L)^2\alpha t}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\,.$$

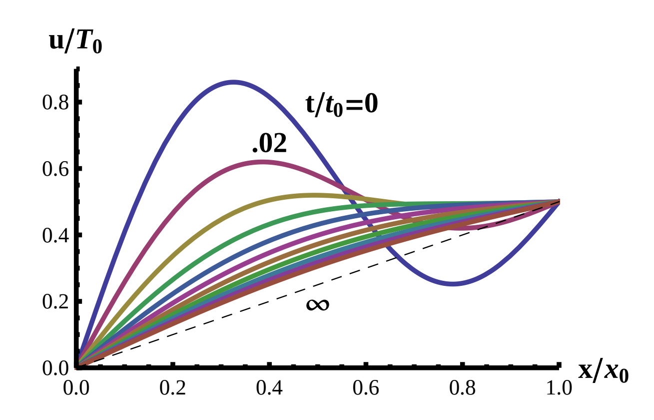


Figura 38: Perfil de la temperatura $u(x,t)$ en una barra finita con condiciones de contorno $u(0,t)=0$, $u(x_0,t)=T_0/2$ y condición incial $u(x,0)=T_0(x/(2x_0)+0{,}4[\sin(\pi x/x_0)+\sin(2\pi x/x_0)]$, para t/t_0 desde 0 a $0{,}2$ con paso $0{,}02$ (y $\alpha x_0^2/t_0=1$). Se indica también el resultado para $t\to\infty$. Las componentes de Fourier más altas decaen más rápidamente, por lo que sólo se observa el primer modo no estacionario (además del estacionario) si t/t_0 no es muy pequeño. Se deja como ejercicio hallar $u(x,t)$.

Determinar c_0 y c_n, e interpretar el resultado, indicando el significado de c_0. Determinar también la función respuesta $K(x,x',t)$ correspondiente.

Problema sugerido V.5.5: Mostrar que la temperatura $u(x,t)$ en una barra finita de longitud L térmicamente aislada en un extremo ($u_x(0,t)=0$) y con temperatura fija en el otro ($u(L,t)=T_L$), que satisface la condición inicial $u(x,0)=\phi(x)$, es de la forma

$$u(x,t)=T_L+\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{-((n+1/2)\pi/L)^2\alpha t}\cos\left(\frac{(n+1/2)\pi}{L}x\right)\,.$$

Determinar c_n, e interpretar el resultado, indicando el límite $\lim_{t\to\infty}u(x,t)$. Determinar, también, la función respuesta $K(x,x',t)$ correspondiente.

V.6. Ecuación de Laplace

V.6.1. Introducción

La ecuación de Laplace no sólo constituye el ejemplo más relevante de ecuación elíptica, sino que, debido a su ubicuidad, puede considerarse como la ecuación más importante de toda la Física Matemática. En efecto, aparece ligada a fenómenos tan diversos como los procesos electromagnéticos, la difusión del calor, la dinámica de fluidos y la gravitación, por citar sólo algunos. De hecho, tanto la ecuación de ondas como la de difusión, contienen al operador de Laplace. En el marco específico de la Matemática, esta ecuación desempeña un papel central en la teoría de las funciones analíticas.

Generalmente, nuestro primer encuentro con la ecuación de Laplace tiene lugar al encarar el estudio de la electrostática. Dada una densidad volumétrica de carga eléctrica $\rho(\boldsymbol{r})$, donde $\boldsymbol{r}$ es un vector de posición, el problema central es la determinación del campo eléctrico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$. Introduciendo el potencial electrostático $u(\boldsymbol{r})$ a través de su relación con el campo: $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla u(\boldsymbol{r})$, donde ∇ es el operador gradiente, se encuentra (ver [19]):

$$\Delta u(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0}\,\rho(\boldsymbol{r}), \tag{V.6.1}$$

donde ϵ_0 es la permitividad eléctrica del vacío y, en coordenadas cartesianas,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{V.6.2}$$

A menudo interesa determinar el potencial electrostático en regiones del espacio donde no se encuentran ubicadas las cargas que originan los campos, es decir, en regiones donde se verifica $\rho(\boldsymbol{r}) = 0$. Entonces, el problema a resolver es

$$\Delta u = 0\,, \tag{V.6.3}$$

que se conoce como ecuación de Laplace homogénea o, simplemente, ecuación de Laplace. La ecuación inhomogénea se conoce como ecuación de Poisson. Recordemos que el operador $\triangle$ es, a menos de una constante, el único operador diferencial lineal de segundo orden invariante tanto frente a traslaciones como rotaciones del sistema de ejes coordenados, lo que explica su ubicuidad en la descripción de sistemas físicos uniformes e isotrópicos. Por ejemplo, la temperatura estacionaria en una cierta región con conductividad térmica isotrópica uniforme, sin fuentes o sumideros de calor en el interior, también satisface la ecuación de Laplace.

En el contexto de nuestro ejemplo, la solución de (V.6.1) (o (V.6.3), según corresponda), suplementada con apropiadas condiciones de contorno, permite, en principio, determinar u y, por lo tanto, también el campo $\boldsymbol{E}$. Este esquema de trabajo, conceptualmente sencillo, que acabamos de delinear someramente, dista de ser trivial a la hora de implementarlo en situaciones concretas. La resolución efectiva de (V.6.3) depende fuertemente

de una elección apropiada del sistema de coordenadas, que contemple de modo adecuado las simetrías de cada situación. Antes de considerar detalladamente estas cuestiones en los párrafos siguientes, resulta conveniente presentar algunos aspectos generales de la ecuación de Laplace homogénea y de sus soluciones, llamadas *funciones armónicas*. Consideremos el caso más simple posible en el que la función u depende solamente de una variable x. El operador laplaciano Δ se reduce a la derivada segunda $\frac{d^2}{dx^2}$ y resulta, entonces, muy fácil encontrar la solución general para este caso:

$$u(x) = ax + b\,,$$

donde a y b son dos constantes que se podrían determinar mediante condiciones en los extremos del intervalo para el cual se desea resolver el problema. Este ejemplo, en su extrema simpleza, permite ya analizar propiedades profundas de las funciones armónicas, que perduran aún en los casos en que se tienen dos, tres o más variables. Es fácil comprobar que, en nuestro ejemplo simple, $u(x) = \frac{u(x+x_0)+u(x-x_0)}{2}, \forall x_0 \in \Re$, es decir que la solución de la ecuación de Laplace en un dado punto resulta ser el promedio de las soluciones a una dada distancia a izquierda y derecha del punto en cuestión. Una consecuencia directa de esta propiedad es que la solución no admite mínimos o máximos locales en el interior de la región; los valores extremos sólo pueden ubicarse en los extremos del intervalo. Enfatizamos que estas propiedades, que resultan evidentes en el caso de una sola variable, siguen siendo válidas para cualquier número de dimensiones. Por ejemplo, en el caso de 2 variables puede demostrarse que el valor de u en un punto (x, y) dentro de la región de interés es igual al promedio de u a lo largo de una circunferencia de radio R con centro en (x, y): $u(x, y) = \frac{1}{2\pi R}\oint u\,dl$. Consecuentemente, en una región bidimensional los valores extremos de u sólo pueden darse sobre la curva que define la frontera de dicha región. Más adelante demostraremos estos resultados.

Como advertimos anteriormente, para poder resolver una ecuación diferencial es crucial elegir apropiadamente el sistema de coordenadas. En caso de resolver la ecuación diferencial en cierta región con borde deberemos, además, imponer ciertas condiciones de borde o de contorno en la frontera de dicha región. En la sección que sigue presentaremos los tipos de condiciones de contorno locales usualmente impuestas sobre el dominio del operador de Laplace y discutiremos la unicidad (o no) de la solución en cada caso.

V.6.2. Teorema del valor máximo para la ecuación de Laplace

Como ocurría en el caso de la ecuación homogénea para la difusión de calor en una barra, la ecuación de Laplace satisface un teorema del valor máximo:

Teorema V.6.1 (del valor máximo) *Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ una región acotada y conexa, con borde $\partial\mathcal{D}$. Si $u(x_1, \ldots, x_n)$, definida y continua en la región $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ es armónica en $\mathcal{D}$, es decir, que satisface*

$$\triangle u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

en $\mathcal{D}$, los valores máximo y mínimo de u se alcanzan en $\partial\mathcal{D}$.

Demostración:

Tomemos, primero, una función $v(x_1, ..., x_n)$ subarmónica, es decir, tal que satisface $\triangle v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} > 0$ en $\mathcal{D}$. Tal función no puede tener un máximo en $\mathcal{D}$. En efecto, si lo tuviese debería cumplirse $\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \leq 0$, $\forall i = 1, \ldots n$ en el mismo, contradiciendo su condición de función subarmónica.

Ahora, supongamos que $u(x_1, ..., x_n)$ es armónica en $\mathcal{D}$, es decir, $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$ en $\mathcal{D}$. Si definimos $v(x_1, ..., x_n) = u(x_1, ..., x_n) + \epsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, con $\epsilon > 0$ arbitrario, tendremos $\triangle v = 2n\epsilon > 0$. Por consiguiente, v toma su máximo valor en $\partial\mathcal{D}$. Como consecuencia de la definición de v, si M es el máximo valor de u en el borde, $v \leq M + \epsilon$ máx$_{\partial\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Por otra parte, $u(x_1, ..., x_n) = v(x_1, ..., x_n) - \epsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < v \leq M + \epsilon$ máx$_{\partial\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Dado que ϵ es arbitrario, resulta $u(x_1, ..., x_n) \leq M$.

El resultado concerniente al mínimo se deriva de inmediato, teniendo en cuenta que, si u es armónica, $-u$ también lo es y los mínimos de la primera no son otra cosa que los máximos de la segunda.

$\square$

El teorema implica, obviamente, que u no puede tener un máximo o mínimo local aislado en el interior de $\mathcal{D}$ (si lo tuviese, el máximo o mínimo absoluto de u en una región $\tilde{D} \subset \mathcal{D}$ suficientemente pequeña que contenga ese extremo se alcanzaría en su interior, contradiciendo el teorema para esta región). Veremos luego, en la sección V.6.7.2, otra demostración rigurosa general de esta propiedad, al mostrar que el valor de una función armónica u en un punto es siempre el promedio de los valores en una esfera sólida circundante. Esto es válido en n dimensiones e implica que u no puede alcanzar el máximo o mínimo en el interior de $\mathcal{D}$, salvo que sea constante.

En forma más intuitiva, la condición $\triangle u = 0$ implica que la suma de las "concavidades" $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ debe ser 0 para una función armónica, por lo que si en un entorno de $\boldsymbol{r}_0$ u es cóncava hacia abajo en una cierta dirección ($\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0$), debe existir al menos una dirección ortogonal en la que u es cóncava hacia arrriba ($\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} > 0$). Esto impide que u exhiba un máximo o mínimo en el interior de $\mathcal{D}$. Si u tiene un punto estacionario ($\boldsymbol{\nabla} u = \boldsymbol{0}$) en el interior debe, entonces, ser necesariamente un punto silla.

V.6.3. Condiciones de contorno para el operador de Laplace

Como ya se mencionó, al estudiar el operador de Laplace en una región $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ con borde $\partial\mathcal{D}$, la correcta definición del operador requiere determinar su dominio mediante la imposición de condiciones de contorno. Los tres tipos de condiciones de contorno más usuales para el problema de Laplace en el interior de una región dada son:

- Determinar u definida y continua en $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ tal que

$$\begin{aligned} \triangle u(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}) \\ u(\mathbf{s}) &= g(\mathbf{s})\,, \end{aligned} \qquad \text{(V.6.4)}$$

  donde $\mathbf{r} \in \mathcal{D}$ y $\mathbf{s} \in \partial\mathcal{D}$.

  Este es el llamado Problema de contorno de *Dirichlet*.

- Determinar u definida y continua en $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ tal que

$$\begin{aligned} \triangle u(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{s}) &= g(\mathbf{s})\,, \end{aligned} \qquad \text{(V.6.5)}$$

  con $\frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{s})$ la derivada normal exterior evaluada en el borde.

  Este es el llamado Problema de contorno de *Neumann*.

- Determinar u definida y continua en $\mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$ tal que

$$\begin{aligned} \triangle u(\mathbf{r}) &= f(\mathbf{r}) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{s}) + h(\mathbf{s})u(\mathbf{s}) &= g(\mathbf{s})\,, \end{aligned} \qquad \text{(V.6.6)}$$

  con $h(\mathbf{s}) \geq 0$ y no idénticamente nula.

  Este es el llamado Problema de contorno de *Robin*.

La unicidad de la solución para el problema de contorno de Dirichlet (V.6.4) se demuestra fácilmente haciendo uso del teorema del valor máximo. En efecto, si suponemos que u y v son dos soluciones del problema $w = u - v$ es armónica y se anula en $\partial\mathcal{D}$. Por lo tanto, $w \leq 0$ y $w \geq 0$. Esto demuestra que w es idénticamente nula.

La unicidad del problema de contorno de Robin se demuestra usando la primera identidad de Green (ver Apéndice B). En efecto, para la diferencia de dos soluciones w se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} (\nabla w)^2 \, dV &= \int_{\mathcal{D}} \nabla(w \nabla w) \, dV \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} w \frac{\partial w}{\partial n} \, dS = -\int_{\partial\mathcal{D}} h(\mathbf{s})(w(\mathbf{s}))^2\,. \end{aligned} \qquad \text{(V.6.7)}$$

En la primera igualdad hemos usado que w es armónica, en la segunda igualdad hemos usado la primera identidad de Green y, finalmente, hemos usado la condición de contorno de la ecuación (V.6.6). Ahora, el primer miembro de la igualdad es no negativo. Como consecuencia de las condiciones impuestas sobre la función h, el último miembro de la igualdad es no positivo. En consecuencia, ambos deben ser idénticamente nulos. La anulación del primer miembro exige que $\nabla w = 0$ y, por lo tanto, que w sea constante en

$\mathcal{D}$. Por su parte, la anulación del último miembro exige la anulación de w en el borde. Por continuidad, concluimos que w es idénticamente nula y hemos demostrado, así la unicidad de la solución al problema de contorno de Robin.

En cuanto al problema de Neumann, es evidente que la solución de la ecuación de Laplace homogénea no es única en este caso, ya que dos soluciones pueden diferir en una constante arbitraria sin contrariar la condición de contorno. También señalamos que el problema general de Neumann sólo está bien formulado si se cumple la condición de compatibilidad $\int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{r})\, dV = \int_{\partial\mathcal{D}} g(\mathbf{s})\, dS$. Efectivamente, en este caso se tiene

$$\int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{r})\, dV = \int_{\mathcal{D}} \triangle u\, dV = \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = \int_{\partial\mathcal{D}} g(\mathbf{s})\, dS\,. \qquad \text{(V.6.8)}$$

Volveremos sobre estos puntos al tratar la función de Green para este tipo de condiciones de contorno.

En cuanto a los correspondientes problemas exteriores, se obtienen idénticas conclusiones sobre la unicidad de sus soluciones si, además, se exige que las mismas permanezcan acotadas en el infinito (ya que el exterior no es una región compacta).

Los problemas de contorno aquí presentados tienen otra característica importante:

Teorema V.6.2 *Con su dominio definido por el caso homogéneo (*$g(\mathbf{s}) = 0\ \forall\ \mathbf{s}$*) de cualquiera de las condiciones de contorno antes presentadas, el operador de Laplace es autoadjunto (ver la nota 1 a pie de página en la sección III.1.3).*

Demostración: Si u *es una función en el dominio del operador de Laplace y* v *es una función en el dominio de su adjunto (aquí supuestas reales), se tiene (*(v, u) *representa el producto escalar usual en* $\mathcal{L}^2$*):*

$$\begin{aligned}(v, \Delta u) &= (v, \nabla\cdot\nabla u) = \int_{\mathcal{D}} dV v \nabla\cdot\nabla u = -\int_{\mathcal{D}} dV (\nabla v)\cdot\nabla u \\ &+ \int_{\partial\mathcal{D}} dS v\frac{\partial u}{\partial n} = \int_{\mathcal{D}} dV (\Delta v) u + \int_{\partial\mathcal{D}} dS \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\,, \end{aligned} \qquad \text{(V.6.9)}$$

donde hemos usado repetidamente el teorema de Gauss. Además, es inmediato verificar que, para todos los problemas de contorno considerados se satisface:

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) = 0\,.$$

si u *y* v *satisfacen la misma condición de contorno. Como consecuencia, definiendo su dominio de cualquiera de estos tres modos, el operador de Laplace resulta autoadjunto, es decir,*

$$(v, \Delta u) = (\Delta v, u)\,.$$

□

Mostremos finalmente que

Teorema V.6.3 *La solución $u(\boldsymbol{r})$ de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ para $\boldsymbol{r} \in \mathcal{D}$ con las condiciones de contorno de Dirichlet $u(\boldsymbol{s}) = g(\boldsymbol{s})$ para $\boldsymbol{s} \in \partial\mathcal{D}$, es la función que minimiza la integral*

$$I = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} |\boldsymbol{\nabla} u|^2 dV$$

entre todas las funciones que satisfacen la condición de contorno anterior.

Demostración:
Si u es la función que minimiza I y consideramos una variación $\delta I = I(u+\delta u) - I(u)$, con $\delta u(\boldsymbol{s}) = 0$ para $\boldsymbol{s} \in \partial\mathcal{D}$, obtenemos, hasta primer orden en δu,

$$\begin{aligned} \delta I &= \int_{\mathcal{D}} (\boldsymbol{\nabla} u)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\delta u) dV = \int_{\partial\mathcal{D}} (\boldsymbol{\nabla} u)\cdot \boldsymbol{n}\delta u \, dS - \int_{\mathcal{D}} \delta u \, \Delta u \, dV \\ &= -\int_{\mathcal{D}} \delta u \, \Delta u \, dV = 0 \end{aligned} \tag{V.6.10}$$

lo cual debe valer $\forall\ \delta u$ que se anule en el borde. Por lo tanto, necesariamente $u(\boldsymbol{r})$ debe satisfacer $\Delta u = 0\ \forall\ \boldsymbol{r} \in \mathcal{D}$. En tal caso, el incremento exacto es $\delta I = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} |\boldsymbol{\nabla}\delta u|^2 dV > 0$ si δu no es nula, lo que muestra que u es necesariamente un mínimo.

□

En otras palabras, una función armónica es la función más “chata” (en el sentido de minimizar el promedio sobre $\mathcal{D}$ del gradiente cuadrado $|\boldsymbol{\nabla} u|^2$) compatible con las condiciones de contorno.

V.6.4. Funciones armónicas en diversas geometrías. El problema de Poisson

El problema de Poisson consiste en la reconstrucción de la solución de la ecuación de Laplace homogénea en el interior de la región de volumen $\mathcal{D}$ a partir del conocimiento de los valores que toma en el borde $\partial\mathcal{D}$. A continuación resolveremos problemas de ese tipo en regiones con distintas geometrías.

V.6.4.1. Armónicos rectangulares

Empecemos por considerar el caso en que u depende sólo de dos variables y la ecuación de Laplace se expresa en coordenadas cartesianas. Esto resultará lo más conveniente cuando el sistema físico a estudiar tenga una forma rectangular. Podría tratarse, por ejemplo, de una placa conductora rectangular con voltajes aplicados en sus lados, siendo la función incógnita el potencial eléctrico en cualquier punto de su interior. O también de una placa rectangular con conductividad térmica uniforme sin fuentes o sumideros de calor en el interior, de la cual se conoce la distribución de temperatura en el borde, siendo la

incógnita la temperatura en el interior. Podría tratarse también de una membrana elástica rectangular estirada y fija en el borde, en el que tiene una cierta altura no uniforme, siendo la incógnita la altura de la membrana en el interior.

Buscaremos, entonces, soluciones de

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

en el interior de un rectángulo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. Estudiaremos primero el problema de Dirichlet correspondiente, o sea, la determinación de u a partir de sus valores en el borde del rectángulo,

$$u(x,b) = f_1(x), \;\; u(x,0) = f_2(x), \; u(a,y) = f_3(y), \; u(0,y) = f_4(y) \, .$$

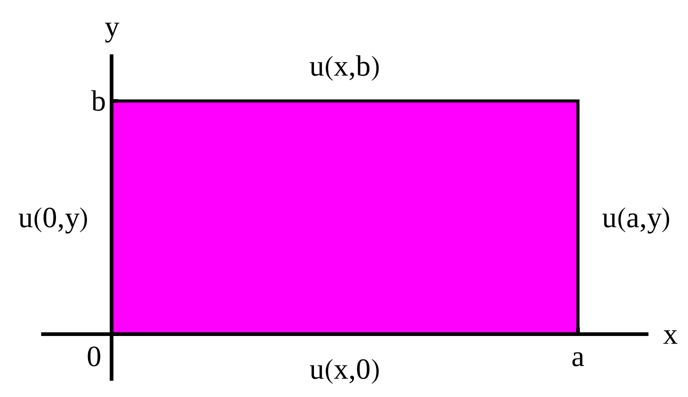


Figura 39: El rectángulo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ y las condiciones de contorno en el problema de Dirichlet asociado.

Debido a la linealidad de la ecuación, con la consiguiente propiedad de superposición, podemos escribir la solución en la forma

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 \, ,$$

donde u_1 es la solución para $f_2 = f_3 = f_4 = 0$ y, en general, u_i aquella para $f_j = 0$ si $j \neq i$.

Consideremos, por ejemplo, u_1. Planteando una solución del tipo

$$u_1(x) = X(x)Y(y)$$

tenemos $\Delta u_1 = X''Y + XY'' = 0$, o sea, $X''/X + Y''/Y = 0$, obteniéndose las ecuaciones

$$X'' = -k^2 X, \qquad Y'' = k^2 Y \, ,$$

con k constante. Las soluciones son de la forma

$$X(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \, , \quad Y(y) = C\cosh(ky) + D\sinh(ky)$$

para $k \neq 0$ y

$$X(x) = A + Bx\,, \quad Y(y) = C + DY$$

para $k = 0$. Como $u_1(0, y) = u_1(a, y) = 0 \Rightarrow X(0) = X(a) = 0$, lo que implica $k = n\pi/a$ (real), con $n = 1, 2, \ldots$ si deseamos obtener soluciones no triviales (u no idénticamente nula). La condición $u_1(x, 0) = 0$ implica, además, $C = 0$. Por lo tanto,

$$X(x)Y(y) = A\sin(k_n x)\sinh(k_n y), \quad k_n = n\pi/a\,,$$

y la solución general para u_1 es

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x)\sinh(k_n y)\,.$$

La condición de contorno

$$u_1(x, b) = f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x)\sinh(k_n b)$$

determina los coeficientes A_n, dado que la expresión anterior constituye el desarrollo en serie de Fourier de $1/2$ rango de senos de $f_1(x)$ en $[0, a]$. Por lo tanto,

$$A_n = \frac{2}{a\sinh(k_n b)} \int_0^a f_1(x)\sin(k_n x)dx\,.$$

La solución final puede, pues, escribirse como

$$u_1(x, y) = \int_0^a \left[\frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x)\sin(k_n x') \frac{\sinh(k_n y)}{\sinh(k_n b)} \right] f_1(x')dx'\,. \qquad \text{(V.6.11)}$$

En forma análoga se procede para los demás casos. Por ejemplo, $u_2(x, y)$ será de la forma

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(k_n x)\sinh[k_n(b - y)]\,.$$

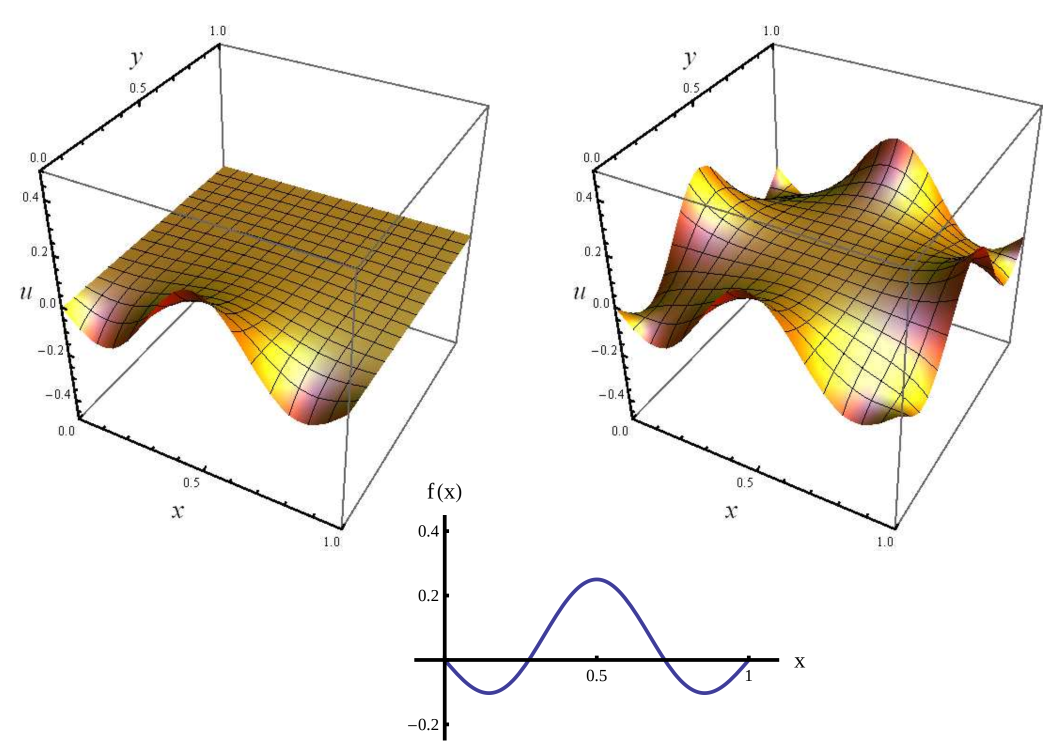


Figura 40: Izquierda: Gráfico de la función armónica en el cuadrado $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, que satisface $u(0,y) = u(1,y) = u(x,1) = 0$ y $u(x,0) = f(x)$, con $f(x) = \alpha \cos \pi x + \beta \sin 3\pi x$ y $\alpha = 0{,}1$, $\beta = -0{,}15$ (centro). Derecha: Gráfico de la función armónica obtenida al repetir dicha función como condición de contorno en los cuatro lados. Se deja como ejercicio dar la expresión de $u(x,y)$ en ambos casos.

Problema sugerido V.6.1: En base a la discusión anterior, encontrar la solución de la ecuación de Laplace en el rectángulo, con condiciones de Neumann sobre los lados.

Consideremos, ahora, el caso en que $a \to \infty$, es decir, la franja $x \geq 0$, $0 \leq y \leq b$, con las condiciones de contorno

$$u(x,0) = u(x,b) = 0, \quad u(0,y) = f(y)\,.$$

Planteando una solución de la forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$, tenemos

$$X'' = k^2 X, \quad Y'' = -k^2 Y\,,$$

cuyas soluciones conviene escribir como

$$X(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}, \;\; Y(y) = C\cos(ky) + D\sin(ky)\,.$$

La condición $u(x,0) = u(x,b) = 0$ implica $Y(0) = Y(b) = 0$, y por lo tanto $C = 0$, con $k = n\pi/b$, real, $n = 1, 2, \ldots$. Si exigimos que u permanezca acotada para $x \to \infty \Rightarrow A = 0$. Por lo tanto,

$$X(x)Y(y) = Be^{-k_n x}\sin(k_n y), \quad k_n = n\pi/b$$

y la solución general es

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n x} \sin(k_n y)\,. \qquad \text{(V.6.12)}$$

La condición de contorno

$$u(0,y) = f(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n y)$$

determina los coeficientes A_n:

$$A_n = \frac{2}{b}\int_0^b f(y)\sin(k_n y)dy\,.$$

La solución final puede escribirse como

$$u(x,y) = \frac{2}{b}\int_0^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n x}\sin(k_n y)\sin(k_n y')\right] f(y')dy'\,.$$

La serie puede, en este caso, evaluarse fácilmente como suma de series geométricas, escribiendo $\sin(k_n y) = (e^{ik_n y} - e^{-ik_n y})/(2i)$ y recordando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-k_n(x+iy)} = \sum_{n=0}^{\infty}(e^{-k(x+iy)})^n = \frac{1}{1-e^{-k(x+iy)}}, \quad k = \pi/b\,.$$

El resultado final es

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n x}\sin(k_n y)\sin(k_n y') = \frac{e^{-kx}(1-e^{-2kx})\sin(ky)\sin(ky')}{(1+e^{-2kx}-2e^{-kx}\cos k(y+y'))(1+e^{-2kx}-2e^{-kx}\cos k(y-y'))}\,.$$

El integrando decrece exponencialmente con x. Los factores en el denominador son la distancia al cuadrado entre los puntos de coordenadas polares (e^{-kx}, ky) y $(1, \pm ky')$ (ver más adelante discusión sobre métodos de variable compleja en V.6.5).

V.6.4.2. Problema del semiplano

En muchas aplicaciones resulta de interés resolver la ecuación de Laplace en una región de extensión infinita. Consideremos ahora el semiplano $y \geq 0$, $x \in \Re$. Resolveremos la ecuación $\Delta u = 0$ conociendo los valores de u en el eje x, $u(x,0) = f(x)$, con la condición que $u(x,y)$ permanezca acotada. Planteando nuevamente separación de variables, $u(x,y) = X(x)Y(y)$, tenemos

$$X'' = -k^2 X, \quad Y'' = k^2 Y\,,$$

con k constante. La solución correspondiente a $k=0$ debe descartarse por no ser acotada. Las restantes soluciones pueden escribirse en la forma

$$X(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx},\quad Y(y)=De^{-ky}+Ee^{ky},\;\; k\neq 0\in\Re\,.$$

Si queremos que u permanezca acotada para $y\to\infty\Rightarrow D=0$ si $k<0$ y $E=0$ si $k>0$, los que podemos resumir como $Y(y)=Ce^{-|k|y}$. Por lo tanto,

$$X(x)Y(y)=A(k)e^{ikx}e^{-|k|y}$$

y la solución general (ahora k es un índice continuo) es

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{ikx}e^{-|k|y}dk\,, \tag{V.6.13}$$

donde la integral denota valor principal. La condición de contorno

$$u(x,0)=f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}A(k)e^{ikx}dk$$

determina, ahora, la función $A(k)$, que no es otra cosa que la transformada de Fourier de $f(x)$ dividida por $\sqrt{2\pi}$. Recordando las fórmulas de inversión obtenemos

$$A(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx\,.$$

Insertando esta expresión en (V.6.13) obtenemos

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}K(x-x',y)f(x')dx'\,,$$

con

$$\begin{aligned}K(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ikx-|k|y}dk=\frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\int_{0}^{\infty}e^{-k[y-ix]}dk\\ &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}[\frac{1}{y-ix}]=\frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\,.\end{aligned}$$

Obtenemos, finalmente,

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x')dx'}{(x-x')^2+y^2}\,. \tag{V.6.14}$$

El denominador es la distancia al cuadrado del punto (x,y) al punto $(x',0)$ del borde. Notemos que

$$\lim_{y\to 0^+}K(x,y)=\delta(x)\,.$$

En efecto, $K(x,y) > 0$ si $y > 0$, con $\lim\limits_{y\to 0^+} K(x,y) = 0$ si $x \neq 0$ y $\lim\limits_{y\to 0^+} K(0,y) = \infty$. Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ydx}{x^2+y^2} = \frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{y})\Big|_{-\infty}^{\infty} = 1\,.$$

Como veremos en próximas secciones, el resultado (V.6.14) puede obtenerse también directamente de la solución de Poisson para el interior del círculo, por métodos de variable compleja y mediante el uso de la función de Green.

Problema sugerido V.6.2: Resolver $\Delta u = 0$ para una lámina rectangular de ancho finito b y longitud infinita ($0 \leq y \leq b$, $x \in \Re$), conociendo los valores de u en el eje y (sobre un segmento de ancho b), $u(0,y) = f(y)$ y sobre los lados: $u(x,0) = g(x)$ y $u(x,b) = h(x)$.

Problema sugerido V.6.3: Resolver $\Delta u = 0$ para una lámina rectangular infinita $0 \leq x \leq \infty$, $0 \leq y \leq \infty$, con $u(x,0) = f(x)$, $u(0,y) = g(y)$. Sugerencia: Completar las condiciones de contorno en forma impar, justificando esta opción.

V.6.4.3. Armónicos rectangulares en tres o más dimensiones

En forma completamente análoga puede tratarse la ecuación $\Delta u = 0$ en regiones del tipo $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$, etc., en tres o más dimensiones. Consideremos, por ejemplo, las condiciones de contorno

$$u(0,y,z) = u(a,y,z) = 0,\ u(x,0,z) = u(x,b,z) = 0$$

$$u(x,y,0) = 0,\ \ u(x,y,c) = f(x,y)\,.$$

Planteando una solución del tipo $u(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$, obtenemos $X''YZ + Y''XZ + Z''XY = 0$ y por lo tanto, dividiendo por XYZ,

$$X''/X + Y''/Y + Z''/Z = 0$$

de donde

$$X'' = -k_x^2 X,\ \ Y'' = -k_y^2 Y,\ \ Z'' = (k_x^2 + k_y^2)Z\,,$$

con k_x, k_y constantes. Las soluciones son de la forma

$$X(x) = A\cos(k_x x) + B\sin(k_x x),\ Y(y) = C\cos(k_y y) + D\sin(k_y y),$$

$$Z(z) = E\cosh(k_z z) + F\sinh(k_z z),\ k_z = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}\,.$$

Para las presentes condiciones de contorno, $A = C = E = 0$, por lo que la solución producto es de la forma $\sin(k_x)\sin(k_y)\sinh(k_z z)$, con $k_x = n\pi/a$, $k_y = m\pi/b$ y n, m naturales > 0. La solución general es, pues,

$$u(x,y,z) = \sum_{n,m} A_{nm}\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{b}y)\sinh(k_{nm}z)\,,$$

con $k_{nm} = \pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}$. La condición de contorno

$$u(x, y, c) = \sum_{n,n} A_{nm} \sin(\frac{n\pi}{a}x) \sin(\frac{m\pi}{a}y) \sinh(k_{nm}c) = f(x, y)$$

determina los coeficientes A_{nm} por medio del desarrollo bidimensional en serie de medio rango de senos:

$$A_{nm} = \frac{2}{a}\frac{2}{b}\frac{1}{\sinh(k_{nm}c)} \int_0^a dx \int_0^b dy\ f(x, y) \sin(\frac{n\pi}{a}x) \sin(\frac{m\pi}{a}y)\,.$$

La solución para condiciones de contorno Dirichlet no nulas en todos los lados se resuelve por superposición (de seis soluciones en 3 dimensiones).

V.6.4.4. Armónicos circulares y solución de Poisson en el disco

Otro caso de gran interés práctico es aquél en el que la región bajo estudio es un sector circular. En esta situación, resultará conveniente elegir un sistema de coordenadas polares con su origen en el centro de las circunferencias que delimitan el sector. Consideremos, entonces, la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$, con

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \qquad \text{(V.6.15)}$$

en un sector circular $r_1 \leq r \leq r_2$, $0 \leq \theta \leq \alpha < 2\pi$. La ecuación de Laplace homogénea en coordenadas polares es, entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = 0\,. \qquad \text{(V.6.16)}$$

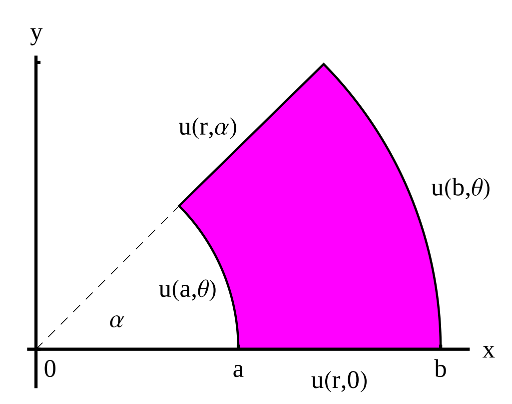


Figura 41: El sector circular $a \leq r \leq b$, $0 \leq \theta \leq \alpha$, y las condiciones de contorno en el problema de Dirichlet asociado.

Proponiendo una solución producto $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, se obtienen las ecuaciones

$$R'' + \frac{R'}{r} - \frac{k^2 R}{r^2} = 0, \qquad \Theta'' = -k^2\Theta$$

con k constante, cuyas soluciones son

$$\begin{aligned} R(r) &= Ar^k + Br^{-k}, \;\; \Theta(\theta) = a\cos(k\theta) + b\sin(k\theta), \;\; k \neq 0 \\ R(r) &= A + B\ln r = B\ln\frac{r}{r_0}, \;\; \Theta(\theta) = a + b\theta, \;\; k = 0 \end{aligned} \qquad \text{(V.6.17)}$$

(la ecuación para R es del tipo de Euler y su solución es de la forma r^λ, con λ determinado por $\lambda(\lambda-1)+\lambda-k^2=0$, o sea, $\lambda=\pm k$; si $k=0$ la otra solución linealmente independiente de $r^0=1$ es $r^\lambda \ln r = \ln r$). Obsérvese que k puede ser, en principio, real, imaginario o complejo (si $k=k_r+ik_i$, $r^k=e^{k\ln r}=e^{k_r \ln r}[\cos(k_i\ln r)+i\sin(k_i \ln r)]$).

Como ejemplo, si $u(r,0)=u(r,\alpha)=0$, con

$$u(r_1,\theta)=f_1(\theta), \quad u(r_2,\theta)=f_2(\theta)$$

$\Rightarrow a=0$ y $k=n\pi/\alpha$ (real), con $n\geq 1$. La solución general es, por lo tanto,

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n r^{n\pi/\alpha}+B_n r^{-n\pi/\alpha})\sin(n\pi\theta/\alpha)\,, \qquad \text{(V.6.18)}$$

donde las constantes A_n y B_n pueden obtenerse a partir del desarrollo en serie de senos de $f_1(\theta)$ y $f_2(\theta)$. Se dejan los detalles para el lector. Obviamente, si u debe permanecer acotada y $r_1=0 \Rightarrow B_n=0$, mientras que, si $r_1>0$ y $r_2\to\infty$, entonces $A_n=0$.

En el caso de un anillo circular $0\leq\theta\leq 2\pi$, con $r_1\leq r\leq r_2$, u debe ser *monovaluada*, lo que implica $k=n$, con n entero (y $b=0$ si $k=n=0$). La solución general es de la forma

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= A_0+B_0\ln r \\ &\quad +\sum_{n=1}^{\infty}(A_n r^n+B_n r^{-n})[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]\,. \end{aligned} \qquad \text{(V.6.19)}$$

Nuevamente, si $r_1=0\Rightarrow B_0=0$, $B_n=0$, mientras que, si $r_2=\infty$, $B_0=0$, $A_n=0$, $n\geq 1$.

Consideremos ahora el problema de determinar una función armónica u en el interior de un círculo de radio $r_2=a$ (o sea $0\leq r\leq a$, $0\leq\theta\leq 2\pi$) conociendo los valores de u en el contorno, $u(a,\theta)=f(\theta)$. La solución general debe ser, en este caso, de la forma

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]\,. \qquad \text{(V.6.20)}$$

Por lo tanto,

$$u(a,\theta)=f(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a^n[a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)]\,,$$

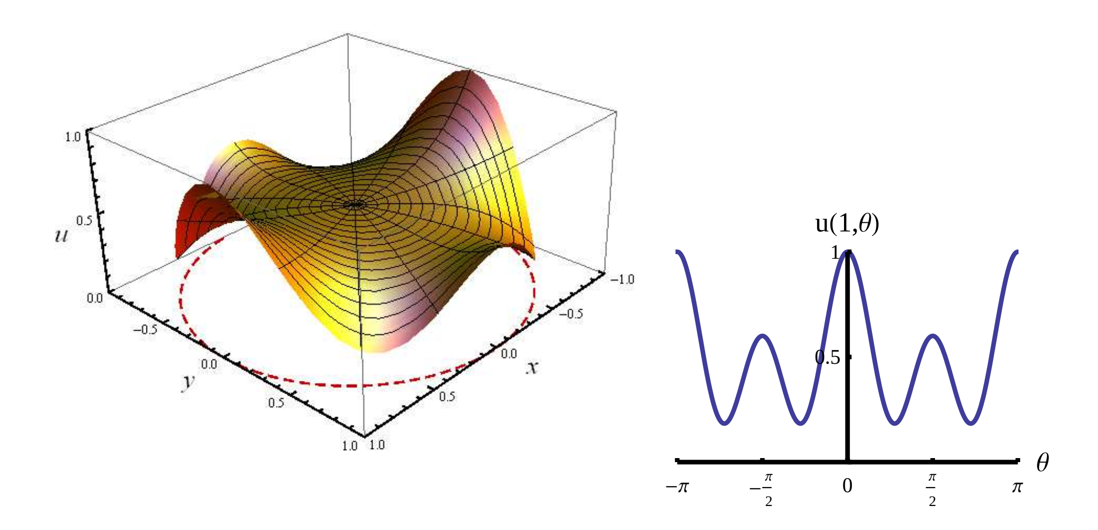


Figura 42: Gráfico de la función armónica $u(r,\theta)$ (izquierda) en el interior del círculo de radio 1 que satisface $u(1,\theta)=\alpha+\beta\cos 2\theta+\gamma\sin 4\theta$, con $\alpha=0{,}5$, $\beta=0{,}2$, $\gamma=0{,}3$. Nótese que $u(r,\theta)$ no tiene máximos ni mínimos locales, alcanzando su valor máximo y mínimo en el borde. En el centro ($r=0$), $u=1/2$, que es el valor medio en el borde. Se deja como ejercicio dar la expresión de $u(r,\theta)$.

de donde, recordando la expresión de los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier,

$$a_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)f(\theta)d\theta,\;\; b_n=\frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi}\sin(n\theta)f(\theta)d\theta,\;\; n\geq 1\,,$$

con $\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta=\langle f\rangle$. Reemplazando en (V.6.20), y teniendo en cuenta que

$$\cos(n\theta)\cos(n\theta')+\sin(n\theta)\sin(n\theta')=\cos[n(\theta-\theta')],$$

obtenemos

$$u(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\{\tfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\cos[n(\theta-\theta')]\}f(\theta')d\theta'\,.$$

Definiendo $z=(r/a)e^{i\theta}$, con $|z|<1$, tenemos

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\cos(n\theta)&=\text{Re}[\tfrac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}z^n]=\tfrac{1}{2}\text{Re}\frac{1+z}{1-z}\\&=\frac{a^2-r^2}{2\,d^2(r,a,\theta)},\quad d^2(r,a,\theta)=a^2+r^2-2ar\cos(\theta)\,.\end{aligned}$$

Encontramos, de esta forma, la *solución de Poisson*,

$$u(r,\theta)=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta')d\theta'}{d^2(r,a,\theta-\theta')}\,.\quad r<a \tag{V.6.21}$$

Notemos que $d(r, a, \theta - \theta')$ es, nuevamente, la *distancia* entre el punto (r, θ) del interior del círculo y el punto (a, θ') del borde.

Comentarios:

1) Si $r = 0$, $d^2 = a^2$ y

$$u(0, 0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta')d\theta' = \langle f \rangle \,.$$

El valor de u en el centro del círculo es, entonces, el *promedio* de los valores de u en el borde del círculo. Como esto es válido para cualquier círculo con centro en $(0, 0)$ y radio $r < a$, vemos que el valor de una función u, armónica en una región $\mathcal{D}$, en un punto cualquiera $(x, y) \in \mathcal{D}$ es igual al *promedio* de los valores de u sobre cualquier circunferencia con centro en (x, y) contenida en $\mathcal{D}$. Una función armónica no puede, en consecuencia, poseer extremos (máximos o mínimos) en el interior de $\mathcal{D}$ (ya que, de ser así, el valor en el extremo sería superior o inferior al promedio). Como ya sabíamos, valores extremos se alcanzan siempre en el borde de $\mathcal{D}$.

2) Problema exterior: Consideremos, ahora, el problema de determinar $u(r, \theta)$ en el exterior del círculo, es decir $r \geq a$, conociendo los valores en el borde, $u(a, \theta) = f(\theta)$. Podemos repetir el esquema anterior, pero es más fácil emplear el siguiente procedimiento de inversión: si $u(r, \theta)$ es una función armónica de la forma general (V.6.19), entonces

$$\begin{aligned} v(r,\theta) &= u(\frac{a^2}{r}, \theta) = A_0 - B_0 \ln\frac{r}{a^2} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\frac{a^{2n}}{r^n} + B_n\frac{r^n}{a^{2n}})[a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta)] \end{aligned}$$

es también armónica, pues es también de la forma (V.6.19), y cumple $v(a, \theta) = u(a, \theta)$. Además, si u está definida para $r < a \Rightarrow v$ estará definida para $a^2/r < a$, o sea, $r > a$. Por lo tanto, la solución para el exterior del círculo será

$$v(r, \theta) = u(\frac{a^2}{r}, \theta) = \frac{r^2 - a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\theta')d\theta'}{d^2(r, a, \theta - \theta')}, \quad r > a$$

(notar que $d(\frac{a^2}{r}, a, \theta) = \frac{a}{r}d(a, r, \theta) = \frac{a}{r}d(r, a, \theta)$). Esto equivale al intercambio $a \leftrightarrow r$ en (V.6.21).

Problema sugerido V.6.4: En base a la discusión anterior, resolver el problema de Neumann ($\Delta u = 0$, con $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=a} = f(\theta)$ y $\langle f \rangle = 0$) para el interior y exterior del círculo.

3) La solución (V.6.21) puede escribirse como

$$\begin{aligned} u(r,\theta) &= \int_0^{2\pi} K(r,a,\theta-\theta')f(\theta')d\theta'\,, \\ K(r,a,\theta) &= \frac{a^2-r^2}{2\pi[a^2+r^2-2ar\cos(\theta)]}\,, \end{aligned} \qquad \text{(V.6.22)}$$

donde $K(r,a,\theta)$ representa la solución para $f(\theta)=\delta(\theta)$. Puede comprobarse que $u(r,\theta)=K(r,a,\theta)$ es una función armónica que satisface $\lim\limits_{r\to a^-} K(r,a,\theta)=\delta(\theta)$, con $\lim\limits_{r\to a^-} K(r,a,\theta)=0$ si $\theta\neq 0$ (o en general, $\theta\neq 2n\pi$, $n\in Z$) y $\lim\limits_{r\to a^-} K(r,a,0)=\infty$.

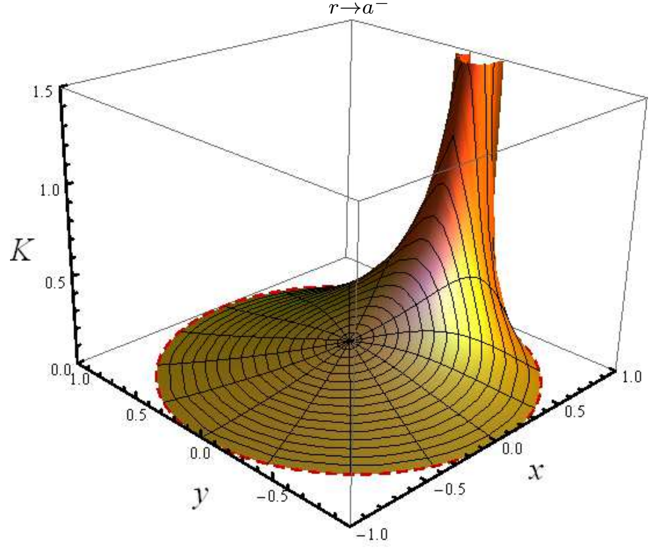


Figura 43: Gráfico de $K(r,a,\theta)$ para $a=1$.

4) Es instructivo observar que el resultado (V.6.14), correspondiente al problema del semiplano, en un contexto de coordenadas cartesianas, puede obtenerse también directamente de la solución de Poisson para el interior del círculo. En efecto, se debe considerar un radio a muy grande y un punto (x,y) próximo a la superficie (con y medido desde el borde del círculo), en el límite $a\gg a-r=y$. En tal caso, $d^2(r,a,\theta)\to(x-x')^2+y^2$, $a^2-r^2=(a+r)(a-r)\to 2ay$ y $ad\theta\to dx'$, por lo que

$$\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\theta)d\theta}{d^2(r,a,\theta)}\to\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x')dx'}{(x-x')^2+y^2}\,,$$

con $f(x')=g(x'/a)$.

V.6.4.5. Armónicos esféricos y solución de Poisson para la bola tridimensional

Consideremos, ahora, la ecuación $\Delta u=0$ en la región esférica $r_1\leq r\leq r_2$, $0\leq\theta\leq\pi$, $0\leq\phi\leq 2\pi$, donde (r,θ,ϕ) son las coordenadas esféricas usuales (definidas por $x=r\sin\theta\cos\phi$, $y=r\sin\theta\sin\phi$, $z=r\cos\theta$). Emplearemos la notación $\Omega=(\theta,\phi)$,

con $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$. En estas coordenadas,

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\Delta_\Omega}{r^2} \\ \Delta_\Omega &= \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\,. \end{aligned} \qquad \text{(V.6.23)}$$

La ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es, entonces,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\Delta_\Omega u}{r^2} = 0\,. \qquad \text{(V.6.24)}$$

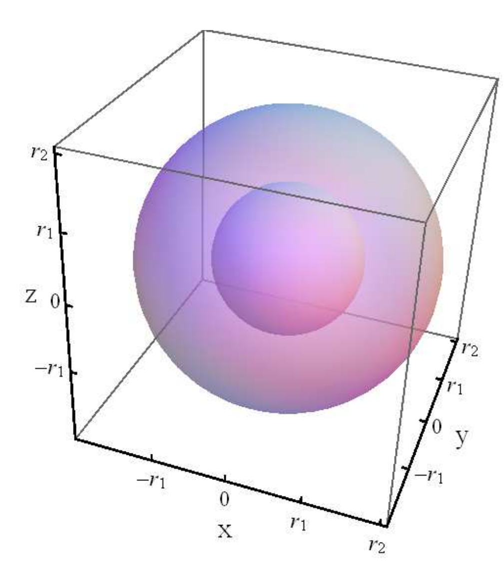


Figura 44: La región esférica $r_1 \leq r \leq r_2$.

Planteando una solución producto $u(r,\theta) = R(r)Y(\Omega)$, se obtienen las ecuaciones

$$R'' + \frac{2}{r}R' - \frac{k^2}{r^2}R = 0, \qquad \Delta_\Omega Y = -k^2 Y\,.$$

con k constante. Como ya hemos discutido en III.2.5, la solución de la parte angular es acotada y monovaluada sólo si $k^2 = l(l+1)$, con l natural e $Y(\Omega) = Y_{lm}(\Omega)$ el armónico esférico de orden l. Utilizaremos ahora los armónicos esféricos complejos normalizados:

$$-\Delta_\Omega Y_{lm}(\Omega) = l(l+1)Y_{lm}(\Omega), \quad -l \leq m \leq l, \quad l = 0, 1, \ldots$$

$$Y_{lm}(\Omega) = \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\phi}(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}$$

donde $P_l^{|m|}(x)$ es el polinomio asociado de Legendre (y $P_l^0(x) = P_l(x)$ el polinomio de Legendre), que satisfacen

$$\int_s Y_{lm}(\Omega)Y^*_{l'm'}(\Omega)d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \qquad \text{(V.6.25)}$$

donde $\int_s d\Omega = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta d\phi$ denota la integral sobre toda la superficie esférica e $Y^*_{lm}(\Omega) = (-1)^m Y_{l-m}(\Omega)$ en la presente convención de fases. $Y_{lm}(\Omega)$ son las autofunciones *normalizadas* de Δ_Ω en la superficie esférica.

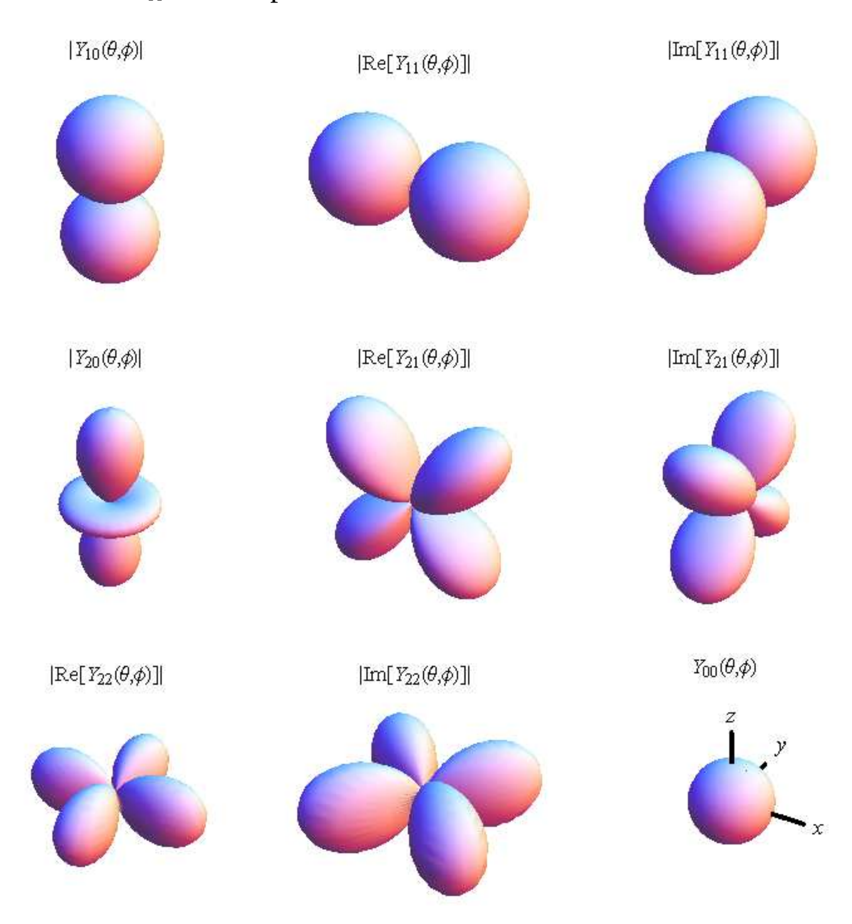


Figura 45: Módulo de los armónicos esféricos. Se grafica la superficie $r = |Y_{lm}(\theta,\phi)|$ para $m = 0$, y $r = |{}^{\mathrm{Re}}_{\mathrm{Im}}[Y_{lm}(\theta,\phi)]|$ para $m \neq 0$, para $l = 0, 1, 2$. La orientación de los ejes (igual en todos los paneles) es indicada en el último panel.

La ecuación para la parte radial es nuevamente del tipo de Euler, con solución r^λ y λ determinado por

$$\lambda(\lambda - 1) + 2\lambda - l(l + 1) = 0\,,$$

cuyas soluciones son $\lambda = l$, $\lambda = -l - 1$. La solución producto es, en consecuencia, de la forma

$$R(r)Y(\Omega) = (ar^l + br^{-l-1})Y_{lm}(\Omega)\,.$$

Soluciones independientes de ϕ (es decir, invariantes frente a rotaciones alrededor del eje z) corresponden a $m = 0$, con l arbitrario, mientras que soluciones independientes de θ y ϕ (es decir, invariantes frente a rotaciones) se obtienen sólo para $l = 0$, y son de la forma $u(r) = a + b/r$.

La solución *general* para $u(r,\Omega)$ es, entonces, de la forma

$$u(r,\Omega)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}[a_{lm}r^l+\frac{b_{lm}}{r^{l+1}}]Y_{lm}(\Omega)\,. \tag{V.6.26}$$

Para soluciones acotadas, si $r_1=0$, $\Rightarrow b_{lm}=0$ mientras que, si $r_2\to\infty$, $\Rightarrow a_{lm}=0$.

Consideremos ahora el problema de determinar la función armónica $u(r,\Omega)$ en el interior de una bola de radio $r_2=a$, conociendo sus valores en la superficie, $u(a,\Omega)=f(\Omega)$. La función debe ser de la forma

$$u(r,\Omega)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-1}^{l}a_{lm}r^lY_{lm}(\Omega)\,. \tag{V.6.27}$$

La condición de contorno implica

$$u(a,\Omega)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-1}^{l}a_{lm}a^lY_{lm}(\Omega)=f(\Omega)\,,$$

que representa el desarrollo en serie de armónicos esféricos de $f(\Omega)$. Teniendo en cuenta (V.6.25), los coeficientes estarán dados por

$$a_{lm}=\frac{1}{a^l}\int_s Y^*_{lm}(\Omega)f(\Omega)d\Omega\,. \tag{V.6.28}$$

Si $f(\Omega)=f(\theta)\Rightarrow a_{lm}=0$ si $m\neq 0$ y $u(r,\Omega)=\sum_{l=0}^{\infty}c_lr^lP_l(\cos\theta_0)$, con $c_l=a_{l0}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$. Si $f(\Omega)=c\Rightarrow c_l=0$ para $l\neq 0$ (por ortogonalidad de P_l, $l\neq 0$, con $P_0=1$) y $u(r,\Omega)=c$.

En general, utilizando (V.6.28) obtenemos

$$u(r,\Omega)=\int_s[\sum_{l=0}^{\infty}(\frac{r}{a})^l\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\Omega)Y^*_{lm}(\Omega')]f(\Omega')d\Omega'\,. \tag{V.6.29}$$

Para evaluar esta serie recordemos, primero, el *teorema de adición* para armónicos esféricos,

$$\sum_{m=-l}^{l}Y_{lm}(\Omega)Y^*_{lm}(\Omega')=\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\theta_0)\,, \tag{V.6.30}$$

donde θ_0 es el ángulo entre las direcciones determinadas por Ω y Ω', y queda definido por

$$\begin{aligned}\cos(\theta_0)&=\mathbf{n}(\Omega)\cdot\mathbf{n}(\Omega')\\&=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')\,,\end{aligned} \tag{V.6.31}$$

con $\mathbf{n}(\Omega) = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$. La ecuación (V.6.30) refleja el hecho de que el primer miembro es un escalar (frente a rotaciones) que depende sólo del ángulo θ_0 entre Ω y Ω'. Entonces, eligiendo $\Omega = (\theta, \phi) = (0, 0)$, y dado que $Y_{lm}(0,0) = \delta_{m0}Y_{l0}(0,0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}$ (pues $P_l^m(1) = \delta_{m0}$), obtenemos

$$\sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(0,0)Y_{lm}(\Omega') = Y_{l0}(0,0)Y_{l0}^*(\Omega') = \tfrac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\theta')\,,$$

lo cual conduce a (V.6.30), dado que $\theta_0 = \theta'$ si $\theta = 0$. Asimismo, (V.6.30) refleja el hecho de que, como función de Ω, $P_l(\cos\theta_0)$ es también autofunción de Δ_Ω con autovalor $-l(l+1)$ y debe ser, por lo tanto, *combinación lineal* de las autofunciones $Y_{lm}(\Omega)$ con el *mismo* l:

$$\begin{aligned} P_l(\cos\theta_0) &= \sum_{m=-l}^{l} c_m Y_{lm}(\Omega), \\ c_m &= \int_s Y_{lm}^*(\Omega)P_l(\cos\theta_0)d\Omega = \tfrac{4\pi}{2l+1}Y_{lm}^*(\Omega')\,. \end{aligned}$$

Debemos, ahora, evaluar la serie

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(\frac{r}{a})^l P_l(\cos\theta_0), \quad r < a\,. \tag{V.6.32}$$

Para ello, usaremos el desarrollo

$$\begin{aligned} \frac{1}{d(r,a,\theta_0)} &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta_0), \quad r<a & \text{(V.6.33)} \\ d(r,a,\theta_0) &= (a^2+r^2-2ar\cos\theta_0)^{1/2}\,, & \text{(V.6.34)} \end{aligned}$$

que puede obtenerse reconociendo que el primer miembro es una función armónica tridimensional de r, θ_0 para $r < a$ y que por lo tanto debe ser de la forma $\sum\limits_{l=0}^{\infty} c_l r^l P_l(\cos\theta_0)$. Para $\theta_0 = 0$, $d^{-1}(r,a,0) = (a-r)^{-1} = a^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}(r/a)^l$, por lo que $c_l = 1/a^{l+1}$. Derivando, ahora, (V.6.33) respecto de r obtenemos

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{\infty} l\frac{r^l}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta_0) = r\frac{\partial}{\partial r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{r^l}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta_0) \\ &= \frac{-r(r-a\cos\theta_0)}{(a^2+r^2-2ar\cos\theta_0)^{3/2}}\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(\frac{r}{a})^l P_l(\cos\theta_0) = \frac{a^2-r^2}{(a^2+r^2-2ar\cos\theta_0)^{3/2}}\,. \tag{V.6.35}$$

Utilizando (V.6.29), (V.6.30), (V.6.35) obtenemos finalmente la solución de Poisson para el interior de la esfera,

$$u(r,\Omega) = \frac{a(a^2-r^2)}{4\pi}\int_s \frac{f(\Omega')d\Omega'}{d^3(r,a,\theta_0)}, \quad r < a\,, \tag{V.6.36}$$

donde θ_0 está determinado por (V.6.31) y $d(r,a,\theta_0)$, dado por (V.6.34), es la distancia entre el punto $\mathbf{r}$ de coordenadas polares (r,Ω) situado en el interior de la esfera y el punto $\mathbf{r}' = (a,\Omega')$ de la superficie.

Si $\Omega = (\theta,\phi) = (0,0) \Rightarrow \theta_0 = \theta'$.

Comentarios:

1) Nuevamente, en el centro de la esfera ($r = 0$), el valor de u es el *promedio* de sus valores en la superficie pues, en este caso, $d = a$ y, entonces,

$$u(0) = \frac{1}{4\pi}\int_s f(\Omega')d\Omega' = \langle f\rangle\,.$$

El valor de una función armónica u en un punto es, en consecuencia, el promedio de los valores en cualquier superficie esférica con centro en ese punto, contenida en la región $\mathcal{D}$ donde u está definida y, por lo tanto, en cualquier esfera con centro en el punto. No puede, pues, poseer extremos en el interior de $\mathcal{D}$.

2) Problema exterior: Consideremos el problema de determinar u armónica en el exterior de la esfera ($r > a$), conociendo sus valores en la superficie, $u(a,\Omega)$. A partir de (V.6.26) vemos que, si u es armónica, entonces

$$\begin{aligned} v(r,\Omega) &= \frac{a}{r}u(\frac{a^2}{r},\Omega) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}[a_{lm}\frac{a^{2l+1}}{r^{l+1}} + b_{lm}\frac{r^l}{a^{2l+1}}]Y_{lm}(\Omega) \end{aligned}$$

es también armónica, pues es de la forma (V.6.26), y satisface $v(a,\Omega) = u(a,\Omega)$. Además, si u está definida para $r < a \Rightarrow v$ estará definida para $r > a$. Por lo, tanto, la solución para el exterior de la esfera es

$$v(r,\Omega) = \frac{a}{r}u(\frac{a^2}{r},\Omega) = \frac{a(r^2-a^2)}{4\pi}\int_s \frac{f(\Omega')d\Omega'}{d^3(r,a,\theta_0)}, \quad r > a\,.$$

3) La solución (V.6.36) puede escribirse como

$$\begin{aligned} u(r,\Omega) &= \int_s K(r,a,\theta_0)f(\Omega)d\Omega\,, \\ K(r,a,\theta_0) &= \frac{a(a^2-r^2)}{4\pi d^3(r,a,\theta_0)}\,, \end{aligned} \tag{V.6.37}$$

donde $K(r,a,\theta_0)$ es la solución para $f(\Omega)=\delta(\Omega-\Omega')\equiv\delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi')/\sin(\theta)$.

Problema sugerido V.6.5 : Comprobar que K es armónica y satisface $\lim\limits_{r\to a^-} K(r,a,\theta_0) = \delta(\Omega-\Omega')$.

V.6.4.6. Armónicos cilíndricos. Solución de Poisson en el cilindro

Consideremos la ecuación $\Delta u=0$ en el interior de un cilindro de radio a y altura b, o sea $0\le r\le a$, $0\le\theta\le 2\pi$, $0\le z\le b$. En coordenadas cilíndricas,

$$\Delta=\Delta_{(r,\theta)}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,,$$

con $\Delta_{(r,\theta)}$ dado por (V.6.15), por lo que la ecuación es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\,. \qquad \text{(V.6.38)}$$

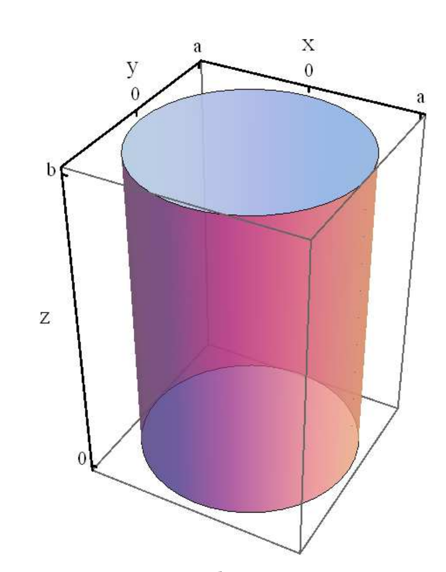


Figura 46: El cilindro $0\le r\le a$, $0\le z\le b$.

Planteando una solución del tipo $u=v(r,\theta)Z(z)$ obtenemos las ecuaciones

$$Z''=k^2 Z,\qquad \Delta_{(r,\theta)}\,v=-k^2 v\,.$$

La solución de la primera ecuación es

$$Z(z)=E\cosh(kz)+F\sinh(kz)\,.$$

Escribiendo $v=R(r)\Theta(\theta)$, la segunda ecuación implica

$$\Theta''=-n^2\Theta,\quad R''+\frac{R'}{r}+(k^2-\frac{n^2}{r^2})R=0\,,$$

cuyas soluciones generales son

$$\Theta(\theta) \;=\; Ae^{in\theta} + Be^{-in\theta}, \quad R(r) = CJ_n(kr) + DY_n(kr)\,,$$

donde J_n, Y_n son las funciones de Bessel de primera y segunda especie (Ver III.2.7). En el presente caso, la condición de R acotado para $r \to 0$ implica $D = 0$, mientras que la de Θ monovaluada, n entero.

Consideremos, por ejemplo, $u = 0$ en los bordes lateral ($u(a, \theta, z) = 0$) e inferior ($u(r, \theta, 0) = 0$), con $u(r, \theta, b) = f(r, \theta)$. Esto implica $k = k_{nm}/a$, con k_{nm} los ceros de J_n ($J_n(k_{nm}) = 0$) y $E = 0$. Recordando que, para n entero, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, la solución general puede escribirse como

$$u(r, \theta, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_n(k_{nm} r/a) e^{in\theta} \sinh(k_{nm} z/a)\,.$$

Para $z = b$, esto conduce al desarrollo de Fourier-Bessel de $u(r, \theta, b) = f(r, \theta)$. Recordando que

$$\begin{aligned}&\int_0^a \int_0^{2\pi} J_n(k_{nm}\tfrac{r}{a}) J_{n'}(k_{n'm'}\tfrac{r}{a}) e^{i\theta(n-n')} r dr d\theta \\ &= \delta_{nn'}\delta_{mm'}\pi a^2 J'_n(k_{nm})^2\,,\end{aligned} \qquad \text{(V.6.39)}$$

obtenemos

$$A_{nm} = \frac{\int_0^a \int_0^{2\pi} f(r, \theta) J_n(k_{nm} r/a) e^{-in\theta} r dr d\theta}{\pi a^2 J'_n(k_{nm})^2 \sinh(k_{nm} b/a)}\,.$$

En forma análoga se resuelve el caso con dato en la base. En cambio, si el dato es $u(a, \theta, z) = f(\theta, z)$, con $u(r, \theta, 0) = u(r, \theta, b) = 0$, tenemos $k = im\pi/b$, con m entero, y debemos plantear una solución de la forma

$$u(r, \theta, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nm} I_n(m\pi r/b) e^{in\theta} \sin(m\pi z/b)\,, \qquad \text{(V.6.40)}$$

donde $I_n(x) = (-i)^n J_n(ix)$ es la función de Bessel modificada de primera especie. Se obtiene un desarrollo en serie de Fourier bidimensional para $u(a, \theta, z) = f(\theta, z)$.

Problema sugerido V.6.6 : Determinar la solución del problema $\Delta u = 0$ en el cilindro $r \leq a$, $0 \leq z \leq b$, si $u(r, \theta, 0) = f(r, \theta)$, $u(r, \theta, b) = g(r, \theta)$ y $u(a, \theta, z) = h(\theta, z)$.

V.6.5. Métodos de variable compleja para problemas bidimensionales

En el caso de dos dimensiones, toda función $u(x, y)$ armónica en una región $\mathcal{D}$ *es la parte real o imaginaria de una función analítica en* $\mathcal{D}$:

$$u(x, y) = \text{Re}[f(z)], \quad z = x + iy\,.$$

Recordemos que $f(z)$ es analítica si $f'(z) = \lim\limits_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ es independiente de la dirección de Δz. En tales condiciones, $f_x(z) = f'(z)$, $f_y(z) = f'(z)i$, lo que implica $\Delta f = f_{xx}(z) + f_{yy}(z) = f''(z) - f''(z) = 0$. Escribiendo

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)\,,$$

con u y v reales, tanto u como v son entonces armónicas. La identidad $f'(z) = f_x(z) = -if_y(z)$ conduce a las condiciones de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ de las que se desprende nuevamente que $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Si, por ejemplo, $u(x,y)$ representa una temperatura, las curvas $u(x,y) = c$ son las isotermas mientras que las curvas $v(x,y) = c'$ son las correspondientes líneas de flujo, ya que los gradientes de u y v son *perpendiculares:* $(u_x,u_y)\cdot(v_x,v_y) = (u_x,u_y)\cdot(-u_y,u_x) = 0$.

Por ejemplo, la parte real e imaginaria de $z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$ y $\ln z = \ln r + i\theta$ son los armónicos circulares, mientras que las de $e^{kz} = e^{kx}(\cos ky + i\sin ky)$, $e^{ikz} = e^{-ky}(\cos kx + i\sin kx)$, son los armónicos rectangulares. En el caso del rectángulo,

$$\sin(kx)\sinh(ky) = -\mathrm{Im}[\cos(kz)] = -\tfrac{1}{2}\mathrm{Im}(e^{ikz} + e^{-ikz})\,.$$

Sabemos que, si f es analítica en una región $\mathcal{D}$ y C es una curva cerrada contenida en $\mathcal{D}$,

$$\oint_C f(z)dz = 0\,.$$

Además, $f(z)$ puede escribirse como la integral

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')}{z'-z}dz'\,, \qquad \text{(V.6.41)}$$

donde C es cualquier curva cerrada que circunda a z, dentro de la región $\mathcal{D}$ donde f es analítica. De esta forma, para $z \in \mathcal{D}$, $f(z)$ queda completamente determinada por los valores que toma f en C.

V.6.5.1. Solución de Poisson para el interior del disco: Obtención con métodos de variable compleja

La solución de Poisson (V.6.21) puede también obtenerse a partir de (V.6.41). Si C es un círculo de radio $a \Rightarrow z' = ae^{i\theta'}$, con $dz' = iz'd\theta'$ y

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z')z'}{z'-z}d\theta', \qquad z' = ae^{i\theta'},\ |z| < a \qquad \text{(V.6.42)}$$

Para obtener (V.6.21) es necesario sin embargo expresar la parte real de $f(z)$ en términos de la parte real de $f(z')$. Definiendo $z_1 = a^2/z^* = z'z'^*/z^*$, tenemos $|z_1| > a$ si $|z| < a$ y entonces, para el mismo círculo C,

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z')}{z'-z_1}dz' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(z')z^*}{z^*-z'^*}d\theta'\,. \qquad \text{(V.6.43)}$$

Restando (V.6.43) de (V.6.42) obtenemos

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(z')\frac{|z'|^2-|z|^2}{|z'-z|^2}d\theta'=\frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(ae^{i\theta'})d\theta'}{d^2(a,r,\theta-\theta')}\,,$$

donde $z=re^{i\theta}$ y $d^2(a,r,\theta-\theta')=|z'-z|^2$. La parte real (o imaginaria) de esta expresión nos da la fórmula de Poisson (V.6.21). Notemos que

$$\frac{a^2-r^2}{d^2(a,r,\theta-\theta')}=\frac{|z'|^2-|z|^2}{|z'-z|^2}=\mathrm{Re}[\frac{z'+z}{z'-z}]\,. \qquad \text{(V.6.44)}$$

V.6.5.2. Transformaciones conformes

Recordemos que la transformación

$$w=f(z)=u+iv, \qquad f'(z)\neq 0\,,$$

con $f(z)$ analítica, mapea una región $\mathcal{D}$ del plano z en una región $\mathcal{S}$ del plano w. Se dice que la transformación es conforme, pues conserva los ángulos entre curvas: para una curva $z(t)$, que se transforma en la curva $w(t)=f(z(t))$, tenemos

$$\frac{dw}{dt}=f'(z)\frac{dz}{dt}$$

y, por lo tanto,, $\arg\frac{dw}{dt}=\arg[f'(z)]+\arg[\frac{dz}{dt}]$, lo que representa una traslación de los argumentos en $\arg[f'(z)]$ (suponiendo que $f'(z)\neq 0$). No obstante, como $|dw|=|f'(z)||dz|$, las distancias se dilatan localmente en $|f'(z)|$.

Si $g(w)$ es analítica en $\mathcal{S}\Rightarrow g(f(z))$ será analítica en $\mathcal{D}$. Por lo tanto, $\mathrm{Re}[g(f(z))]$ será una función armónica en $\mathcal{D}$. Esto indica que, una vez conocida la solución armónica $\mathrm{Re}[g(w)]$ en $\mathcal{S}$, podemos hallar la solución en $\mathcal{D}$ mediante una transformación conforme.

Por ejemplo, la transformación

$$w=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$$

mapea el rectángulo $0\leq x\leq a$, $0\leq y\leq b$ en el sector circular $1\leq r\leq e^a$, $0\leq\theta\leq b$. En esta región hemos visto que los armónicos son de la forma $w^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$ para $k\neq 0$.

Los armónicos rectangulares son, pues, la parte real e imaginaria de

$$(e^z)^k=e^{kz}=e^{kx}(\cos ky+i\sin ky),$$

donde k puede ser real o complejo, resultado que hemos obtenido por separación de variables (además, $\ln w=\ln r+i\theta$ y $\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\ln w)^2=\theta\ln r$ (armónicos circulares para $k=0$) se transforman en $\ln e^z=z=x+iy$, y $\frac{1}{2}\mathrm{Im}[z^2]=xy$, que son los armónicos rectangulares para $k=0$).

Como ejemplo específico, la transformación

$$w = e^{-\alpha z/b} = e^{-\alpha x/b}[\cos(\alpha y/b) - i\sin(\alpha y/b)]$$

mapea la franja semi-infinita $x \geq 0$, $0 \leq y \leq b$ en el sector circular $0 \leq r \leq 1$, $-\alpha \leq \theta \leq 0$, donde la solución general acotada está dada por (V.6.18) con $B_n = 0$. La solución en la franja se obtiene, entonces, reemplazando

$$r = |e^{-\alpha z/b}| = e^{-\alpha x/b}, \quad \theta = \arg(e^{-\alpha z/b}) = \alpha y/b$$

en (V.6.18), con $r^{n\pi/\alpha} = e^{-n\pi x/b}$, lo que conduce inmediatamente a la solución (V.6.12).

Como segundo ejemplo, obtendremos la fórmula (V.6.14) para la función armónica en el semiplano a partir de la fórmula de Poisson (V.6.21), utilizando una transformación conforme que mapee el semiplano superior en el interior de un círculo de radio 1. Una tal transformación es

$$w = \frac{z-i}{z+i}\,.$$

En efecto, si $z = x$ ($y = 0$) $\Rightarrow |w| = |\frac{x-i}{x+i}| = 1$. Además, $(0, i)$ se transforma en $(0, 0)$, de modo que es el semiplano superior el que pasa al interior del círculo (recordemos que los llamados mapeos lineales $w = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$ mapean rectas y círculos en rectas y círculos). Tenemos, para $z' = (x', 0)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}[\frac{w'+w}{w'-w}] &= \mathrm{Re}[i\frac{1+zz'}{z-z'}] = \frac{y(1+x'^2)}{|z'-z|^2} \\ d\theta' &= \frac{dw'}{iw'} = \frac{2dz'}{1+z'^2} = \frac{2dx'}{1+x'^2}\,, \end{aligned} \qquad \text{(V.6.45)}$$

con $|z' - z|^2 = (x - x')^2 + y^2$. Por lo tanto, utilizando (V.6.21), (V.6.44) y las expresiones anteriores,

$$g(w(z)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(w')\mathrm{Re}[\frac{w'+w}{w'-w}]d\theta' = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(w(x'))dx'}{(x-x')^2+y^2}\,.$$

La parte real nos da el resultado (V.6.14) para $u(x, y) = \mathrm{Re}[g(w(z))]$, con $g(w(x')) = u(x', 0) = f(x')$.

V.6.6. Problemas de autovalores para el operador de Laplace

V.6.6.1. Propiedades generales

Como demostramos en la sección V.6.3, el operador de Laplace, con su dominio definido por cualquiera de los tres tipos de condiciones de contorno allí estudiados, es autoadjunto. Como sabemos de nuestro estudio del problema de Sturm-Liouville (ver III.1), el carácter autoadjunto del operador conduce a propiedades deseables de sus autovalores y autofunciones, algunas de las cuales demostramos a continuación.

Teorema V.6.4 *Las autofunciones correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.*

Demostración: Si $-\Delta u_n = \lambda_n u_n$ *y* $-\Delta u_m = \lambda_m u_m$*, multiplicando la primera ecuación por* u_m*, la segunda por* u_n *y restándolas, se tiene:*

$$u_m \Delta u_n - u_n \Delta u_m = -(\lambda_m - \lambda_n) u_n u_m \, .$$

Ahora, integrando sobre la región $\mathcal{D}$ *y usando nuevamente en forma repetida el teorema de Gauss, tenemos:*

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_{\mathcal{D}} u_n u_m \, dV = \int_{\mathcal{D}} (u_n \Delta u_m - u_m \Delta u_n) dV = \int_{\partial \mathcal{D}} \left(u_n \frac{\partial u_m}{\partial n} - u_m \frac{\partial u_n}{\partial n} \right) dV = 0 \, ,$$

donde hemos usado que el término de borde se anula para cualquiera de los tres tipos de condiciones de contorno que estamos tratando. En consecuencia, hemos demostrado que, si $\lambda_m \neq \lambda_n$ *las correspondientes autofunciones son ortogonales.*

□

Tales autofunciones no sólo son ortogonales, sino que, además, constituyen un sistema completo, que permite desarrollar cualquier función que satisfaga las mismas condiciones de contorno en una serie absoluta y uniformemente convergente de tales autofunciones. La demostración de esta propiedad es similar a la del caso de una dimensión (ver, por ejemplo, [9]).

Teorema V.6.5 *Cuando el dominio del operador de Laplace se define con cualquiera de las condiciones de contorno antes presentadas, sus autovalores resultan reales*

Demostración: Supongamos que $\lambda = \mu + i\nu$*, con* $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ *y* $\nu \neq 0$ *es un autovalor complejo, correspondiente a una autofunción* u*. Entonces, conjugando la ecuación satisfecha por* u *vemos que* $\bar{\lambda} = \mu - i\nu$ *debe ser autovalor correspondiente a la autofunción* $\bar{u}$*. Por el teorema anterior,* u *y* $\bar{u}$ *son ortogonales, es decir,* $\int_{\mathcal{D}} \rho |u|^2 \, dV = 0$*, lo cual fuerza a* u *a ser idénticamente nula y contradice la hipótesis del teorema.*

□

Este teorema también muestra que las autofunciones siempre pueden elegirse reales. En efecto, si una función compleja es autofunción con un cierto autovalor asociado, su compleja conjugada es autofunción con el mismo autovalor asociado y, en virtud de la linealidad del operador, pueden tomarse combinaciones reales de ambas como autofunciones. En otras palabras, tanto la parte real como imaginaria serán autofunciones con el mismo autovalor si son no nulas.

Es fácil mostrar, ahora, que los autovalores de $-\Delta$ con las condiciones de Dirichlet o Neumann son no negativos: Si $-\Delta u = \lambda u$ con u , λ reales, entonces

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\mathcal{D}} u^2 \, dV &= \int_{\mathcal{D}} -u\Delta u \, dV = -\int_{\partial\mathcal{D}} u \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2 \, dV \\ &= 0 + \int_{\mathcal{D}} |\nabla u|^2 \, dV \geq 0 \end{aligned} \tag{V.6.46}$$

lo cual muestra que $\lambda \geq 0$.

Finalmente, mencionamos que, en las condiciones de los teoremas anteriores, puede demostrarse que existe un autovalor mínimo del operador $-\Delta$ y que los autovalores de dicho operador forman una secuencia ordenable y divergente por valores positivos [9].

Presentaremos, a continuación, ejemplos de resolución del problema de autovalores para el operador de Laplace, con condiciones de contorno de Dirichlet, en diversas geometrías. En realidad, consideraremos las autofunciones del operador $-\Delta$ ya que, como veremos, el mismo resultará, en todos los casos a considerar, definido positivo.

V.6.6.2. Autovalores del laplaciano en un rectángulo

Buscamos la solución al problema

$$-\Delta u(x,y) = -\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right] u(x,y) = \lambda u(x,y)$$

en la región $\mathcal{D} = \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 / 0 < x < a, 0 < y < b\}$, con las condiciones de contorno $u(0,y) = u(a,y) = u(x,0) = u(x,b) = 0$.

A tal fin, proponemos una solución en variables separadas de la forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$. Reemplazando en la ecuación de autovalores tenemos:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -\lambda \, .$$

Como ya hemos explicado, la ecuación anterior implica

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} + \lambda = \alpha \, ,$$

donde α es una constante a determinar.

La ecuación correspondiente a la función $X(x)$ es

$$X'' + \alpha X = 0 \, .$$

Es fácil verificar que no existen soluciones no triviales que satisfagan las condiciones de contorno en ambos extremos del intervalo $[0,a]$ para $\alpha = 0$. Para $\alpha \neq 0$ la solución general es de la forma $X(x) = A \sin \sqrt{\alpha} x + B \cos \sqrt{\alpha} x$. La condición de contorno $u(0,y) = 0 \, \forall y$ exige $B = 0$. Por su parte, la condición $u(a,y) = 0 \, \forall y$ determina

$\sqrt{\alpha_n} = \frac{n\pi}{a}$, $n = 1, 2, \ldots \in \mathbb{N}$. Notar que la consideración de los valores enteros negativos de n conduciría a autofunciones linealmente dependientes de las seleccionadas. Por lo tanto, tenemos $X_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi}{a} x$, $n = 1, 2, \ldots \in \mathbb{N}$.

Habiendo determinado los posibles valores de α, debemos aún resolver la ecuación para la función $Y(y)$, que se escribe como

$$Y''(y) + \left[\lambda - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right] Y(y) = 0\,.$$

Como en el caso anterior, las condiciones de contorno hacen que no existan soluciones distintas de la trivial para $\lambda = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$. Para los restantes valores de λ la solución general es de la forma $Y(y) = C \sin \sqrt{\left[\lambda - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]} y + D \cos \sqrt{\left[\lambda - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]} y$. La condición de contorno $u(x, 0) = 0\, \forall x$ exige $D = 0$, mientras que la condición $u(x, b) = 0\, \forall x$ determina los valores admisibles $\sqrt{\lambda_{nm} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} = m\pi$, $n, m = 1, 2, \ldots \in \mathbb{N}$.

Resumiendo, las autofunciones buscadas son de la forma

$$u_{nm}(x, y) = A_{nm} \sin \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y \tag{V.6.47}$$

y sus correspondientes autovalores son

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 \,, \tag{V.6.48}$$

con $n, m = 1, 2, \ldots \in \mathbb{N}$.

Notar que, según lo esperado, los autovalores son reales, admiten un ordenamiento y constituyen una secuencia divergente por valores positivos.

Problema sugerido V.6.7: Verificar que las autofunciones correspondientes a distintos autovalores son ortogonales y normalizarlas.

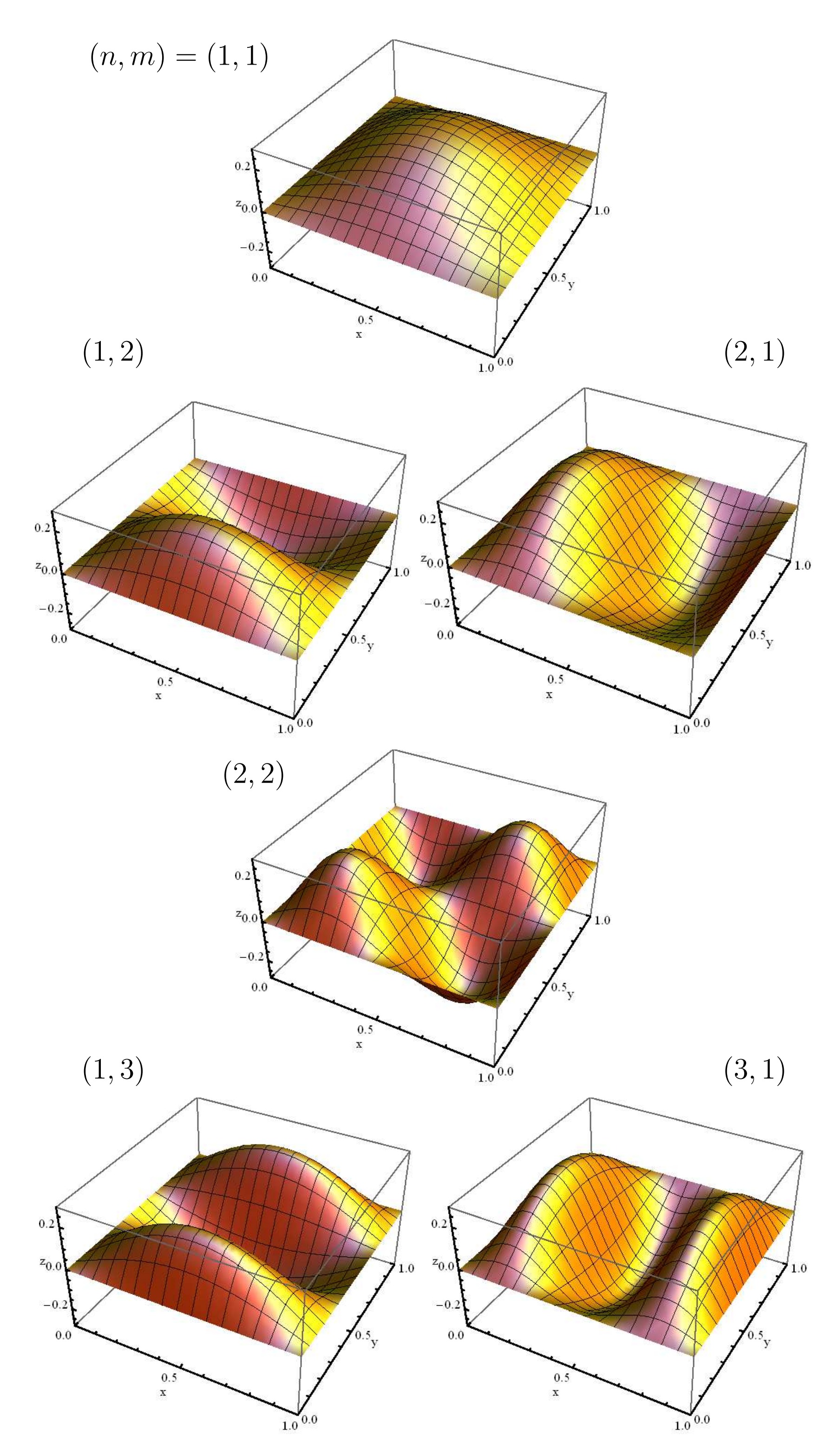


Figura 47: Las primeras seis autofunciones $u_{nm}(x, y)$ del laplaciano en un cuadrado de lado 1, dadas por (V.6.47). Los autovalores son $\lambda_{nm} = \pi^2(n^2 + m^2)$. Estas autofunciones representan, por ejemplo, los primeros modos normales de vibración de una membrana cuadrada fija en los bordes, siendo las frecuencias de vibración proporcionales a $\sqrt{\lambda_{nm}}$.

V.6.6.3. Autovalores del laplaciano en un disco y en un cilindro

Pasemos, ahora, a considerar el problema de autovalores para el operador laplaciano, con condiciones de contorno de tipo Dirichlet, en un disco de radio a:

$$-\Delta u(r,\theta) = -\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right] u(r,\theta) = \lambda u(r,\theta)$$

con la condición de contorno $u(a,\theta)=0$ y la condición de u acotada en $r=0$. Pediremos, además, que las autofunciones sean univaluadas, es decir, periódicas de período 2π en la variable θ. La ecuación precedente puede reescribirse como:

$$\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right] u(r,\theta) = -\lambda r^2 u(r,\theta)\,.$$

Para resolverla, usamos nuevamente el método de separación de variables, proponiendo $u(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$. De reemplazar esta expresión en la ecuación anterior resulta:

$$\left[\frac{1}{R(r)}r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \lambda r^2\right] = -\frac{1}{\Theta(\theta)}\frac{d^2}{d\theta^2}\Theta(\theta) = \alpha\,,$$

donde α es, nuevamente, la constante de separación, que determinaremos a continuación. La ecuación satisfecha por $\Theta(\theta)$ admite un modo cero ($\alpha=0$) constante, ya que el mismo es trivialmente periódico. La solución general para $\alpha\neq 0$ está dada por:

$$\Theta(\theta) = A e^{i\sqrt{\alpha}\theta}\,.$$

La condición de periodicidad (univaluación) exige que $\alpha = n^2$, $n=\pm1,\pm2,\ldots$. De modo que, incluyendo el autovalor nulo, tenemos $\alpha=n^2$, $n\in\mathbb{Z}$.

Pasemos, ahora, a la ecuación para $R(r)$. Debemos resolver:

$$\left[r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right) + (\lambda r^2 - n^2)\right] R(r) = 0\,.$$

El cambio de variable $z=\sqrt{\lambda}r$ conduce a la ecuación de Bessel, cuya solución es

$$R(r) = B_n\, J_n(\sqrt{\lambda}r) + C_n Y_n(\sqrt{\lambda}r)\,.$$

La condición de acotación en el origen exige que $C_n = 0\,\forall n$. Dado que $J_{-n} = (-1)^n J_n$, podemos elegir la parte radial de las autofunciones como $J_{|n|}$ para $n<0$. Finalmente, la condición de contorno en $x=a$ determina $\lambda_{nm} = \left(\frac{k_{nm}}{a}\right)^2$, $n=0,1,\ldots,$ $m=1,2,\ldots$, donde j_{nm} es la m-ésima raíz no nula de la función de Bessel de orden $|n|$.

Resumiendo: para este problema tenemos autofunciones de la forma

$$u_{\pm n,m}(r,\theta) = A_{\pm n,m} e^{\pm i\,n\,\theta} J_{|n|}(k_{nm} r/a) \tag{V.6.49}$$

con autovalores

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{k_{nm}}{a}\right)^2,\; n=0,1,\ldots,\; m=1,2,\ldots\,. \tag{V.6.50}$$

Notar que podrían, también, elegirse autofunciones reales, tomando funciones seno y coseno en lugar de exponenciales complejas (que corresponden a la parte real e imaginaria de (V.6.49)).

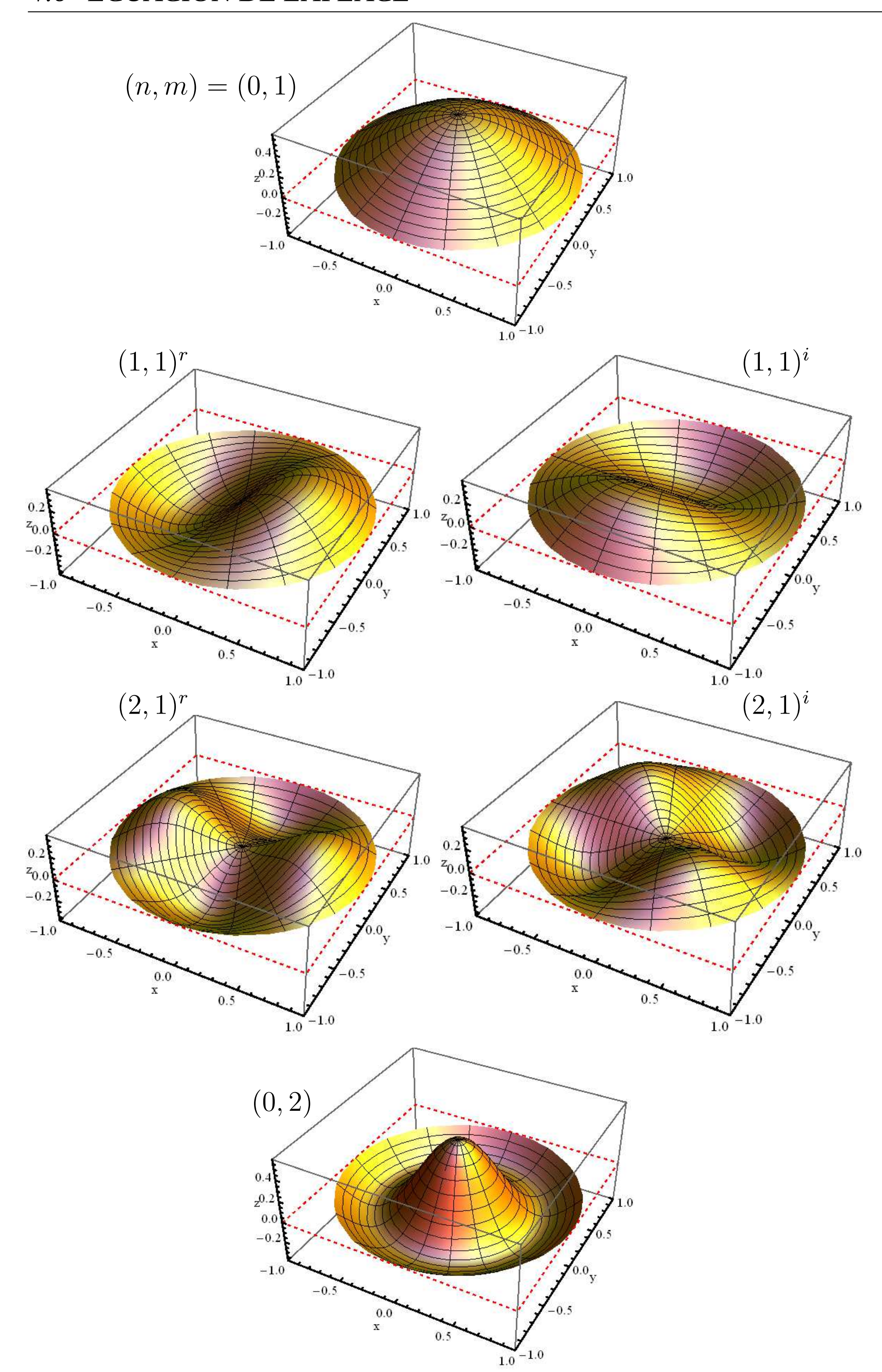


Figura 48: Las primeras seis autofunciones $u_{nm}(r,\theta)$ del laplaciano en el disco $r<1$, dadas por (V.6.49) (se toman las partes real e imaginaria si $n\geq 1$). Los autovalores son $\lambda_{nm}=k_{nm}^2\approx$ $5{,}78$; $14{,}68$; $26{,}37$; $30{,}47$. Representan los modos normales de vibración de un membrana circular fija en los bordes, siendo las frecuencias de vibración $\propto k_{nm}$. Nótese que los primeros autovalores de $-\Delta$ en un cuadrado de igual área son $\lambda_{11}\approx 6,28$; $\lambda_{21}\approx 15,71$ $\lambda_{22}\approx 25,13$; $\lambda_{31}\approx 31,42$.

Nótese que, nuevamente, los autovalores resultan reales y positivos y pueden ordenarse a partir de un autovalor mínimo.

Problema sugerido V.6.8: Verifique que las autofunciones obtenidas son ortogonales (con la adecuada medida de integración en coordenadas polares) cuando corresponden a autovalores distintos. Determine el factor de normalización.

Problema sugerido V.6.9: Resuelva el problema de autovalores para un cilindro de radio a y altura b, con condición de contorno Dirichlet homogéneas en toda su frontera. Muestre que las autofunciones tienen la expresión $u_{nml} = A_{\pm nml} e^{\pm i\, n\, \theta} J_{|n|}(\frac{k_{nm} r}{a}) \sin \frac{l\pi z}{b}$ y sus correspondientes autovalores son $\lambda_{nml} = \left(\frac{k_{nm}}{a}\right)^2 + \left(\frac{l\pi z}{b}\right)^2$, donde $n = 0, 1, \ldots, m, l = 1, 2, \ldots$.

V.6.6.4. Autovalores del laplaciano en la bola tridimensional

Finalmente, resolvamos el problema de autovalores para (menos) el operador de Laplace en una bola tridimensional (ver nota 2 a pie de página, en la sección III.2.4) de radio a, con condiciones Dirichlet sobre la esfera que constituye su frontera.

$$-\Delta u(r, \theta, \varphi) = \lambda u(r, \theta, \varphi)\,,$$

Esta ecuación, escrita en coordenadas esféricas es

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda u = 0\,, \qquad \text{(V.6.51)}$$

con $0 \leq r \leq r_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ y $0 \leq \theta \leq \pi$.

Proponiendo una solución en variables separadas $u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$, tenemos:

$$\frac{1}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR(r)}{dr}\right) + \lambda r^2 = -\frac{1}{Y(\theta, \varphi)}\Delta_{\theta,\varphi} Y(\theta, \varphi)\,, \qquad \text{(V.6.52)}$$

donde

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\,. \qquad \text{(V.6.53)}$$

En la ecuación (V.6.52), el miembro izquierdo sólo depende de la variable r, mientras el miembro derecho sólo depende de las variables angulares. Para que la igualdad sea válida para todos los valores de las variables es, entonces, necesario que ambos miembros sean constantes. Llamaremos a esa constante $\alpha(\alpha + 1)$.

Ya hemos estudiado la ecuación para la parte angular del laplaciano (ver III.2.5) y sabemos que sólo admite soluciones en serie convergentes para $\alpha = l \in \mathbb{N} + \{0\}$. Dichas soluciones son los armónicos esféricos Y_{lm}.

La ecuación para $R(r)$ se escribe

$$R_l'' + \frac{2}{r}R_l' + \left[\lambda - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R_l = 0\,.$$

Mediante la sustitución $R_l(r) = r^{-1/2}\tilde{R}_l(r)$ se encuentra la ecuación de Bessel:

$$\tilde{R}_l'' + \frac{1}{r}\tilde{R}_l' + [\lambda - \frac{(l+1/2)^2}{r^2}]\tilde{R}_l = 0\,,$$

cuya solución general, según hemos visto al estudiar las funciones de Bessel, es

$$\tilde{R}_l(r) = \tilde{A}_l J_{l+1/2}(kr) + \tilde{B}_l Y_{l+1/2}(kr), \quad k = \sqrt{\lambda}\,.$$

Por lo tanto,

$$R_l(r) = r^{-1/2}\tilde{R}_l(r) = A_l j_l(kr) + B_l y_l(kr)\,,$$

donde $A_l = \sqrt{2k/\pi}\tilde{A}_l$, $B_l = \sqrt{2k/\pi}\tilde{B}_l$. Las funciones

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{J_{l+1/2}(x)}{\sqrt{x}}, \quad y_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{Y_{l+1/2}(x)}{\sqrt{x}},$$

son las denominadas *funciones de Bessel esféricas*. Dado que $J_\nu(x) \propto x^\nu$ para $x \to 0$, $j_l(x)$ permanece finita para $x \to 0$.

Puede verse, a partir de la definición de las funciones de Bessel, que

$$j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr}, \quad y_0(kr) = -\frac{\cos kr}{kr}\,.$$

Estas son, pues, las dos soluciones linealmente independientes con simetría esférica ($l = 0$). En particular, $-y_0(kr) \pm i j_0(kr) = e^{\pm ikr}/r$.

En general, puede demostrarse que

$$j_l(x) = x^l(\frac{-1}{x}\frac{d}{dx})^l \left(\frac{\sin(x)}{x}\right), \quad y_l(x) = x^l(\frac{-1}{x}\frac{d}{dx})^l \left(\frac{-\cos(x)}{x}\right)\,.$$

En todo $\mathbb{R}^3$, k es real arbitrario. En cambio, en una esfera de radio a ($b = 0$) con la condición de contorno $R_l(a) = 0$ tendremos $B_l = 0$ y $j_l(ka) = 0$, por lo que $k = k^s_{ln}/a$, siendo k^s_{ln} el n-ésimo 0 de $j_l(x)$. Las autofunciones son, en tal caso,

$$u_{nlm}(r,\Omega) = j_l(k^s_{ln}r/a)Y_{lm}(\Omega) \tag{V.6.54}$$

y los autovalores

$$\lambda_{ln} = (k^s_{ln})^2/a^2\,. \tag{V.6.55}$$

V.6.7. Función de Green del laplaciano

V.6.7.1. Definición y desarrollo en autofunciones para el problema de Dirichlet

Consideremos la ecuación general inhomogénea

$$-\Delta u = f(\mathbf{r}) \tag{V.6.56}$$

en una cierta región $\mathcal{D}$ con borde $\partial\mathcal{D}$, con la condición de contorno $u(\mathbf{r}) = 0$ en el borde $\partial\mathcal{D}$. Sean $u_k(\mathbf{r})$, $k = 1, 2, \ldots$, las autofunciones *normalizadas* de Δ en $\mathcal{D}$ con la anterior condición de contorno, definidas por

$$-\Delta u_k(\mathbf{r}) = \lambda_k u_k(\mathbf{r}), \quad u_k(\mathbf{r}) = 0 \text{ si } \mathbf{r} \in \partial\mathcal{D} \tag{V.6.57}$$

$$\int_{\mathcal{D}} u_k(\mathbf{r}) u^*_{k'}(\mathbf{r}) dV = \delta_{kk'} \,, \tag{V.6.58}$$

donde el autovalor λ_k es real y positivo (suponiendo $\mathcal{D}$ finito). Podemos desarrollar la solución u de (V.6.56) y la carga o fuente $f(\mathbf{r})$ en la forma

$$u(\mathbf{r}) = \sum_k c_k u_k(\mathbf{r}), \qquad f(\mathbf{r}) = \sum_k f_k u_k(\mathbf{r}) \,,$$

con

$$c_k = \int_{\mathcal{D}} u^*_k(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) dV, \qquad f_k = \int_{\mathcal{D}} u^*_k(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) dV \,.$$

Además, utilizando dos veces la identidad de Green (ver Apéndice B y [20]),

$$\int_{\mathcal{D}} u^*_k \Delta u dV = \int_{\partial\mathcal{D}} (u^*_k \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*_k}{\partial n}) dS + \int_{\mathcal{D}} u \Delta u^*_k dV \tag{V.6.59}$$

$$= \int_{\partial\mathcal{D}} (u^*_k \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial u^*_k}{\partial n}) dS - \lambda_k c_k \,, \tag{V.6.60}$$

donde $\frac{\partial}{\partial n}$ denota derivada normal. La integral de borde se anula si $u_k = u = 0$ en $\mathcal{D}$. Multiplicando la ecuación (V.6.56) por $u^*_k(\mathbf{r})$ e integrando obtenemos, entonces,

$$\lambda_k c_k = f_k \,, \tag{V.6.61}$$

de donde

$$c_k = f_k / \lambda_k \,.$$

En consecuencia, la solución puede expresarse como

$$u(\mathbf{r}) = \sum_k \frac{f_k u_k(\mathbf{r})}{\lambda_k} = \int_{\mathcal{D}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') dV' \,, \tag{V.6.62}$$

donde

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_k \frac{u_k(\mathbf{r}) u^*_k(\mathbf{r}')}{\lambda_k} \tag{V.6.63}$$

es la *función de Green*. Notemos que tal desarrollo tiene sentido, dado que el problema que estamos tratando no admite modos cero.

Si $f(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \Rightarrow u(\mathbf{r}) = G(\mathbf{r},\mathbf{r_0})$, por lo que la función de Green queda definida por la ecuación

$$-\Delta G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \quad G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = 0 \text{ si } \mathbf{r}\in\partial\mathcal{D}\,. \tag{V.6.64}$$

$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ es, por lo tanto, el potencial electrostático o temperatura en $\mathbf{r}$ originado por una carga o fuente puntual en $\mathbf{r}'$, y que se anula en el borde $\partial\mathcal{D}$ (lo que corresponde a un borde conectado a tierra para el potencial o mantenido a temperatura 0). Notemos que

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}',\mathbf{r})$$

(pues G es real), de modo que la temperatura en $\mathbf{r}$ debida a una fuente en $\mathbf{r}'$ es igual a la temperatura en $\mathbf{r}'$ debida a una fuente en $\mathbf{r}$, independientemente de la forma de $\mathcal{D}$ o de las simetrías geométricas particulares del problema. Esto es consecuencia del carácter autoadjunto de Δ.

Matemáticamente, $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ puede considerarse el núcleo (kernel), en la base de coordenadas, del operador lineal integral G, el cual es el inverso del operador diferencial $-\Delta$. Escribiendo $u(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{D}}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')u(\mathbf{r}')dV'$, la acción de Δ sobre u puede expresarse como

$$\Delta u(\mathbf{r}) \;=\; \int_{\mathcal{D}}\Delta(\mathbf{r},\mathbf{r}')u(\mathbf{r}')dV', \quad \Delta(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \Delta\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,.$$

Desarrollando en la base de autofunciones, $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \sum_k a_k u_k(\mathbf{r})$, obtenemos $a_k = \int_{\mathcal{D}} u_k^*(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dV = u_k^*(\mathbf{r}')$ y por lo tanto,

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') &= \sum_k u_k(\mathbf{r})u_k^*(\mathbf{r}')\\ \Delta(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= -\sum_k \lambda_k u_k(\mathbf{r})u_k^*(\mathbf{r}')\,,\end{aligned} \tag{V.6.65}$$

en concordancia con el desarrollo (V.6.63). En la base de autofunciones, Δ y G quedan, entonces, representados por "matrices" diagonales de elementos $\Delta_{kk'} = -\lambda_k\delta_{kk'}$, $G_{kk'} = \frac{1}{\lambda_k}\delta_{kk'}$, mientras que δ queda representado por la matriz identidad (de elementos $\delta_{kk'}$). De esta forma, $G = \Delta^{-1}$. En esta base, u y f quedan representados por vectores columna de elementos u_k, f_k, y la ecuación diferencial (V.6.56) por la ecuación matricial $\sum_{k'}\Delta_{kk'}c_{k'} = f_k$, que conduce a la ecuación (V.6.61).

Mediante la función de Green es posible, también, resolver la ecuación de Laplace conociendo los valores de u en el borde,

$$\Delta u = 0, \;\; u(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) \text{ si } \mathbf{r}\in\partial\mathcal{D}. \tag{V.6.66}$$

Multiplicando nuevamente la ecuación anterior por $u_k^*(\mathbf{r})$ e integrando, obtenemos, utilizando (V.6.60),

$$\int_{\mathcal{D}} u_k^*\Delta u\,dV = -\int_{\partial\mathcal{D}} g(\mathbf{r})\frac{\partial u_k^*}{\partial n}dS - \lambda_k c_k = 0\,,$$

de donde

$$c_k = -\frac{1}{\lambda_k}\int_{\partial\mathcal{D}} g(\mathbf{r})\frac{\partial u_k^*}{\partial n}dS\,.$$

La solución puede, en consecuencia, expresarse como

$$u(\mathbf{r}) = -\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}g(\mathbf{r}')dS'\,,$$

con

$$\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'} = \sum_k \frac{1}{\lambda_k}u_k(\mathbf{r})\frac{\partial u_k^*(\mathbf{r}')}{\partial n'}$$

la derivada normal (respecto de $\mathbf{r}'$) de la función de Green.

La solución formal al problema general

$$-\Delta u = f(\mathbf{r}),\quad u(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}) \text{ si } \mathbf{r}\in\partial\mathcal{D}$$

es, entonces,

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{D}} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')dV' - \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n'}g(\mathbf{r}')dS\,. \qquad \text{(V.6.67)}$$

Las mismas expresiones rigen si reemplazamos Δ por un operador $L = -\Delta + q(\mathbf{r})$, con q derivable en $\mathcal{D}$, siempre y cuando L *no poseea autovalores nulos* (lo cual queda garantizado si $q(\mathbf{r}) > 0$ en $\mathcal{D}$). Entonces, $u_k(\mathbf{r})$ son las autofunciones de L. Véase, también, Apéndice A.

Como ejemplo directo del desarrollo en autofunciones (V.6.63), la función de Green para el rectángulo $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ es

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \frac{4}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(k_n x)\sin(k_n x')\sin(l_m y)\sin(l_m y')}{k_n^2 + l_m^2} \\ &= \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(k_n x)\sin(k_n x')\sinh(k_n y)\sinh[k_n(b-y')]}{k_n\sinh(k_n b)}\,, \end{aligned}$$

donde $\mathbf{r} = (x,y)$, $\mathbf{r}' = (x',y')$, $k_n = n\pi/a$, $l_m = m\pi/b$, $n,m = 1,2,\ldots$ y la última expresión es válida para $y < y'$. Hemos utilizado los métodos dados en el Apéndice C para evaluar la suma sobre m. Reobtenemos así el resultado (V.6.11) para el problema del rectángulo.

V.6.7.2. Funciones de Green en dos, tres y n dimensiones

Consideremos ahora el problema de determinar la función de Green del laplaciano en el espacio completo. Comenzaremos con el caso tridimensional. Las autofunciones "normalizadas" de Δ en todo $\mathbb{R}^3$ son

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{e^{ik_x x}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{ik_z z}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}}{(2\pi)^{3/2}}\,, \qquad \text{(V.6.68)}$$

donde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ y $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$. Satisfacen

$$-\Delta u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = k^2 u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad k^2 = |\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$
$$\int u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) u^*_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) d^3r = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{r}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{k}')} d^3r = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,,$$

donde la integral denota valor principal sobre todo el espacio, $d^3r = dxdydz$ y

$$\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}') = \delta(k_x - k'_x)\delta(k_y - k'_y)\delta(k_z - k'_z)\,.$$

Utilizando el desarrollo en autofunciones, la función de Green puede determinarse como

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{|\mathbf{k}|^2} d^3k \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty k^2 dk \int_0^\pi \frac{e^{ikr\cos(\theta)}}{k^2}\sin\theta d\theta \\ &= \frac{2}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{\sin(kr)}{kr} dk = \frac{1}{4\pi r}\,, \end{aligned} \tag{V.6.69}$$

donde $r = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, $\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = kr\cos\theta$ y hemos utilizado el resultado (deducido al introducir la transformada de Fourier)

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

El resultado (V.6.69) puede también obtenerse en forma más simple y física a partir del teorema de Gauss (o sea, la identidad de Green (V.6.59) para $u_k = 1$). Obviamente, debido a la invariancia traslacional y rotacional de Δ en el espacio completo, $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ será una función únicamente de la distancia $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$, es decir,

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\,.$$

Considerando ahora una bola R centrada en el origen de radio $r > 0$ arbitrario, a partir de $-\Delta G = \delta(\mathbf{r})$ obtenemos, dado que $\int_R \delta(\mathbf{r})dV = 1$,

$$-\int_R \Delta G dV = -\int_{\partial R} \frac{\partial G}{\partial n} dS = -G'(r)4\pi r^2 = 1\,,$$

con $r = |\boldsymbol{r}|$, de donde $G'(r) = -1/(4\pi r^2)$ y entonces,

$$G(r) = \frac{1}{4\pi r}\,,$$

donde hemos impuesto la condición de contorno $\lim\limits_{r\to\infty} G(r) = 0$.

Notemos que $\frac{1}{r}$ es la única función armónica (además de la función constante) que es independiente de Ω en tres dimensiones, de modo que, necesariamente, $G(r) \propto r^{-1}$ para $r > 0$, dado que $\Delta G(r) = 0$ si $r \neq 0$.

En dos dimensiones, procediendo de la misma manera obtenemos $-G'(r)2\pi r = 1$, de donde $G'(r) = -\frac{1}{2\pi r}$ y

$$G(r) - G(r_0) = -\frac{\ln(r/r_0)}{2\pi}, \quad r > 0\,.$$

Recordemos que, en dos dimensiones, $\ln r$ es la única función armónica (además de una constante) independiente de θ. No es, entonces, posible satisfacer la condición $G(r) < \infty$ (y, por lo tanto, $G(r) \to 0$) para $r \to \infty$. Lo mismo ocurre en una dimensión donde, a partir de $-G'(r)2 = 1$ obtenemos $G(r) - G(r_0) = -\frac{1}{2}(r - r_0)$ (o sea, $G(x, x') = -\frac{1}{2}|x - x'| + c$).

Generalización a $n > 3$ dimensiones: Utilizando el teorema de Gauss en la forma anterior para una bola n-dimensional R centrada en el origen, obtenemos $-\int_R \Delta G dV_n = -\int_S \frac{\partial G}{\partial n} dV_{n-1} = -G'(r)\alpha_n r^{n-1} = 1$, donde

$$\alpha_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \tag{V.6.70}$$

es el área de la hiperesfera de radio 1 (S^{n-1}) inmersa en un espacio de dimensión n. ($\alpha_2 = 2\pi$, $\alpha_3 = 4\pi$, $\alpha_4 = 2\pi^2$). Por lo tanto, de $G'(r) = -1/(\alpha_n r^{n-1})$ se obtiene, imponiendo $\lim\limits_{r\to\infty} G(r) = 0$,

$$G(r) = \frac{1}{\alpha_n (n-2) r^{n-2}}\,, \quad n > 2\,. \tag{V.6.71}$$

Esto implica, en particular, que la solución del problema de Dirichlet en el interior de la bola n-dimensional,

$$\Delta u = 0, \quad |\boldsymbol{r}| < a, \qquad u(\boldsymbol{r}) = g(\boldsymbol{r}), \quad |\boldsymbol{r}| = a\,,$$

es

$$u(\boldsymbol{r}) = -\int_{\partial R} \frac{\partial G}{\partial n'} g(\boldsymbol{r'}) dS'\,, \tag{V.6.72}$$

con $dS' = r'^{n-1} d\Omega_n$ y $d\Omega_n$ el diferencial de ángulo sólido n-dimensional. En el centro $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ obtenemos entonces $-\frac{\partial G}{\partial n'} = -G'(r') = \frac{1}{\alpha_n r'^{n-1}}$ y, por lo tanto,

$$u(\boldsymbol{0}) = \frac{1}{\alpha_n} \int_{\partial R} g(\Omega_n) d\Omega_n = \langle g \rangle_{\partial R}\,. \tag{V.6.73}$$

Es decir, $u(\boldsymbol{0})$ es el promedio de los valores que toma en el borde de la bola. Esto demuestra, nuevamente, que una función armónica no constante no puede tener máximos ni mínimos locales en ninguna dimensión.

Problema sugerido V.6.10: Demostrar el resultado (V.6.70). Sugerencia: Integrar la función e^{-r^2} en $\mathbb{R}^n$, utilizando coordenadas cartesianas y coordenadas polares.

V.6.7.3. Función de Green para el semiplano

En general, la función de Green para una región $\mathcal{D}$ puede obtenerse sumando a la función de Green para el espacio completo una función u armónica en $\mathcal{D}$ ($\Delta u = 0$ en $\mathcal{D}$) tal que la suma satisfaga la condición de contorno $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$ si $\mathbf{r} \in \partial\mathcal{D}$. Por supuesto, u no tiene por qué ser armónica fuera de $\mathcal{D}$.

Consideremos, por ejemplo, el semiplano $y > 0$ en dos dimensiones. La función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, con $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{r}' = (x', y')$, e $y, y' > 0$ debe anularse sobre el eje x ($y = 0$). Esto puede lograrse mediante el método de las imágenes, colocando, además de la fuente puntual en (x', y') con “carga” 1, otra (virtual) en $\boldsymbol{r}'' = (x', -y')$ con carga -1. Así,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2\pi}[\ln d_+ - \ln d_-] = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{d_+}{d_-}\,, \tag{V.6.74}$$

$$d_\pm^2 = (x - x')^2 + (y \mp y')^2\,. \tag{V.6.75}$$

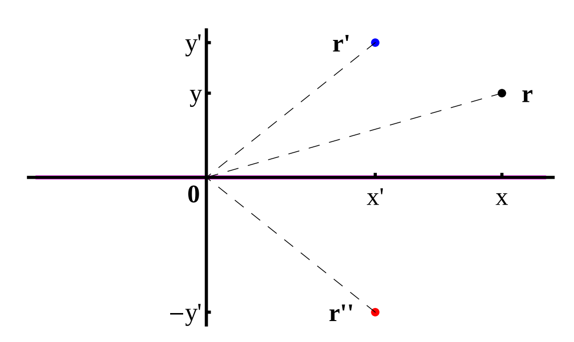


Figura 49: Método de las imágenes para el semiplano.

Si $y = 0$, $d_+ = d_-$ y $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$. Notar que, ahora, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ ya no es sólo función de $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = d_+$, dado que la región no es invariante ante traslaciones sobre el eje y.

La derivada normal en $y' = 0$ es

$$-\left.\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial y'}\right|_{y'=0} = \frac{-1}{\pi}\frac{y}{d^2}, \quad d^2 = (x - x')^2 + y^2\,,$$

con d la distancia de $\mathbf{r}$ al punto $\mathbf{r}' = (x', 0)$ sobre el eje x. La solución de la ecuación $\Delta u = 0$ para $y > 0$, con $u(x, 0) = f(x)$ es, pues,

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial y'}\right|_{y'=0} f(x')dx' = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x')dx'}{(x - x')^2 + y^2}\,, \tag{V.6.76}$$

que coincide con el resultado (V.6.14) obtenido por separación de variables.

La ventaja de este método es que puede aplicarse directamente en tres o más dimensiones. Para la región $z > 0$ en tres dimensiones, obtenemos, de la misma manera,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{4\pi}[\frac{1}{d_+} - \frac{1}{d_-}], \tag{V.6.77}$$

$$d_\pm^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z \mp z')^2\,,$$

la cual se anula en $z'=0$, y

$$\left.\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial z'}\right|_{z'=0} \;=\; \frac{1}{2\pi}\frac{z}{d^3},\quad d^2=(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\,,$$

donde d es la distancia de $\mathbf{r}=(x,y,z)$ a $\mathbf{r}'=(x',y',0)$. La solución de la ecuación $\Delta u=0$ para $z>0$, con $u(x,y,0)=f(x,y)$ es

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x',y')dx'dy'}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}\,.$$

En n dimensiones, procediendo en forma análoga, se obtiene $\frac{\partial G}{\partial x_n'}|_{x_n'=0}=\frac{2}{\alpha_n}\frac{x_n}{d^n}$, con d la distancia de $\mathbf{r}$ al punto $\mathbf{r}'$ sobre el eje $x_n=0$.

El resultado (V.6.77) puede también obtenerse mediante el desarrollo (V.6.63) en las autofunciones

$$u_{\mathbf{k}}(x,y,z)=\frac{e^{ik_xx}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{ik_yy}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(k_zz)\,,$$

lo que da lugar a la representación integral

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') \;=\; \frac{1}{2\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}dk_x\int_{-\infty}^{\infty}dk_y\int_{0}^{\infty}dk_z\frac{e^{i(k_x(x-x')+k_y(y-y'))}\sin(k_zz)\sin(k_zz')}{k_x^2+k_y^2+k_z^2}\,.$$

V.6.7.4. Función de Green para la bola y el disco

La forma más rápida de obtener la función de Green en el círculo o en la bola $r<a$ es, nuevamente, utilizando el método de las imágenes. Consideremos, primero, el caso de la bola. Colocando una carga $+1$ en $\mathbf{r}'$, con $|\mathbf{r}'|=r'<a$, y una carga virtual $-\frac{a}{r'}$ en $\mathbf{r}''=\frac{a^2}{r'^2}\mathbf{r}'$, con $|\mathbf{r}''|=r''=\frac{a^2}{r'}>a$, obtenemos

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=\frac{1}{4\pi}[\frac{1}{d}-\frac{a}{r'}\frac{1}{d'}]\,, \tag{V.6.78}$$

donde d, d' son las distancias de $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}'$ y $\mathbf{r}''$:

$$d^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\theta_0,\;\; d'^2=r^2+r''^2-2rr''\cos\theta_0\,,$$

con $r=|\mathbf{r}|$ y θ_0 el ángulo entre $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$.

De esta forma, si $\mathbf{r}$ está en el borde de la bola (ver Figura 50) $r=a$. Además, los triángulos $(0,\mathbf{r}',\mathbf{r})$ y $(0,\mathbf{r},\mathbf{r}'')$ son semejantes (pues tienen un ángulo en común y $r'/a=a/r''$), por lo que $d/d'=r'/a$ y $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')=0$. Si $r'\to 0$, $d\to r$ y $d'\to\infty$, con $r'd'\to a^2$ se tiene

$$G(\mathbf{r},0)=\frac{1}{4\pi}(\frac{1}{r}-\frac{1}{a})\,. \tag{V.6.79}$$

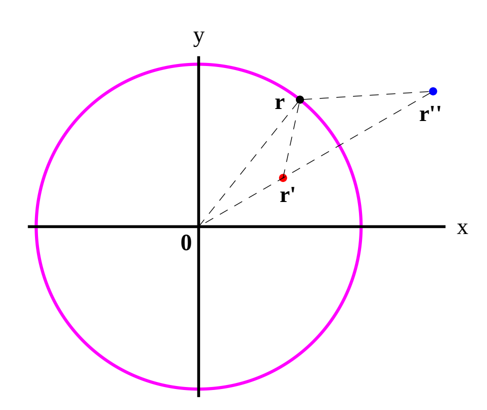


Figura 50: Método de las imágenes para la bola o disco.

Análogamente, en el caso del círculo,

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{-1}{2\pi}[\ln d - \ln\frac{d'r'}{a}] = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{da}{d'r'}\,. \tag{V.6.80}$$

Si $r' \to 0$,

$$G(\mathbf{r},\mathbf{0}) = -\frac{1}{2\pi}\ln(r/a)\,. \tag{V.6.81}$$

En ambos casos, $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ es de la forma $f(d) - f(d'r'/a)$.

Evaluemos ahora la derivada normal en $r' = a$ (en cuyo caso $d = d'$, y $r' = r'' = a$). Obtenemos

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial r'}\right|_{r'=a} &= f'(d)[\frac{\partial d}{\partial r'} - \frac{r'}{a}\frac{\partial d'}{\partial r'} - \frac{d}{a}] \\ &= f'(d)\frac{2a^2 - d^2 - 2ar\cos\theta}{da} = f'(d)\frac{a^2 - r^2}{da}\,, \end{aligned} \tag{V.6.82}$$

donde $\frac{\partial d}{\partial r'}|_{r'=a} = -\frac{\partial d'}{\partial r'}|_{r'=a} = (a - r\cos\theta_0)/d$.

En el caso de la bola, $f'(d) = -1/(4\pi d^2)$ y la solución al problema $\Delta u = 0$ para $r < a$, con $u(a,\Omega) = f(\Omega)$ es, reemplazando $dS = a^2 d\Omega'$,

$$u(r,\Omega) = -\int_S \frac{\partial G}{\partial r'} f(\Omega')dS = \frac{a(a^2 - r^2)}{4\pi}\int_S \frac{f(\Omega')d\Omega'}{d^3(a,r,\theta_0)}\,,$$

con θ_0 dado por (V.6.31). Volvemos a encontrar, así, la solución (V.6.36) obtenida por separación de variables.

Para el círculo, $f'(d) = -1/(2\pi d)$ y la solución al problema $\Delta u = 0$ para $r < a$, con $u(a,\theta) = f(\theta)$ es, reemplazando $dS = ad\theta'$,

$$u(r,\theta) = -\int_S \frac{\partial G}{\partial r'} f(\theta')dS = \frac{a^2 - r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\theta')d\theta'}{d^2(a,r,\theta_0)}\,,$$

con $\theta_0 = \theta - \theta'$, que coincide con (V.6.21). El caso n dimensional se trata en forma similar.

En el caso bidimensional, la función de Green para una región $\mathcal{D}$ arbitraria puede hallarse mediante una transformación conforme $w = f(z)$ que mapee $\mathcal{D}$ en el interior del círculo unidad. Más aún, si se mapea z' en el origen, utilizando (V.6.81) vemos que la función de Green será, directamente,

$$G(z, z') = -\frac{1}{2\pi} \ln |w| \,.$$

Por ejemplo, (V.6.80) puede obtenerse de (V.6.81) mediante la transformación conforme

$$w = a\frac{z - z'}{zz'^* - a^2}, \quad |z'| < a \,,$$

que mapea z' a 0 y el círculo $|z| < a$ en el círculo $|w| < 1$ (si $z = ae^{i\theta}$, $|w| = |\frac{ae^{i\theta}-z'}{z'^* e^{i\theta}-a}| = 1$). En efecto,

$$|w| = \frac{a|z - z'|}{|z'^*||z - a^2/z'^*|} = \frac{ad}{r'd'} \,,$$

con $d = |z - z'|$, $d' = |z - a^2/z'^*|$, $r' = |z'|$.

V.6.7.5. Función de Green para el problema de Neumann

Consideremos ahora el problema

$$-\Delta u = f(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = g(\mathbf{r}) \text{ si } \mathbf{r} \in \partial\mathcal{D} \,. \tag{V.6.83}$$

Físicamente, es la ecuación que determina la temperatura estacionaria en una región R cuando existe un flujo determinado de calor a través de la superficie $\partial\mathcal{D}$, y fuentes internas de calor representadas por $f(\mathbf{r})$. Obviamente, para que exista solución estacionaria, es necesario que el flujo total de calor a través de $\partial\mathcal{D}$ sea igual (y opuesto) al proporcionado por f en todo el volumen. Como ya hemos visto al definir este problema de borde, matemáticamente, esto es consecuencia de la aplicación de la identidad de Green (ver [20]),

$$\int_{\partial\mathcal{D}} g(\mathbf{r})dS = \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \int_{\mathcal{D}} \Delta u dV = -\int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{r})dV \,. \tag{V.6.84}$$

Esta es una condición necesaria para la existencia de solución. Por otro lado, es claro que la solución, si existe, no es única, pues puede sumarse una constante arbitraria: Si $u(\mathbf{r})$ es solución $\Rightarrow$ $u(\mathbf{r}) + c$ es también solución. La constante c es, de hecho, una autofunción de Δ para el problema de Neumann homogéneo, con autovalor 0:

$$-\Delta u_k(\mathbf{r}) = \lambda_k u_k(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial u_k}{\partial n} = 0 \text{ si } \mathbf{r} \in \partial\mathcal{D} \,. \tag{V.6.85}$$

El autovalor más bajo es $\lambda_0 = 0$ y corresponde a la autofunción normalizada $u_0(\mathbf{r}) = 1/\sqrt{V}$, donde $V = \int_{\mathcal{D}} dV$ es el volumen de $\mathcal{D}$. Por ortogonalidad con u_0, el resto de las autofunciones tendrá valor medio nulo:

$$\frac{1}{V}\int_{\mathcal{D}} u_k(\mathbf{r})dV = 0, \quad k \neq 0 \,.$$

Consideremos, primero, el caso $g(\mathbf{r}) = 0$ (o sea, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en $\partial\mathcal{D}$), que corresponde a un borde térmicamente aislante. La condición necesaria de existencia de solución estacionaria es que el calor total suministrado en el interior sea 0:

$$\int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{r})dV = 0\,. \qquad \text{(V.6.86)}$$

En este caso, podemos escribir $u(\mathbf{r}) = \sum_k \lambda_k c_k u_k(\mathbf{r})$, $f(\mathbf{r}) = \sum_k f_k u_k(\mathbf{r})$, con $u_k(\mathbf{r})$ las autofunciones determinadas por (V.6.85) y

$$c_k = \int_{\mathcal{D}} u(\mathbf{r})u_k^*(\mathbf{r})dV, \quad f_k = \int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{r})u_k^*(\mathbf{r})dV\,.$$

La condición (V.6.86) implica

$$f_0 = \int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{r})u_0^*(\mathbf{r})dV = \frac{1}{\sqrt{V}}\int_{\mathcal{D}} f(\mathbf{r})dV = 0\,.$$

Multiplicando la ecuación (V.6.83) por $u_k^*(\mathbf{r})$ y utilizando (V.6.60), obtenemos

$$\lambda_k c_k = f_k\,.$$

Como $\lambda_0 = f_0 = 0$ y $\lambda_k \neq 0$ si $k \neq 0$, tenemos

$$c_k = f_k/\lambda_k, \quad k > 0, \quad c_0 \text{ arbitrario}\,.$$

La solución puede, por lo tanto, escribirse como

$$u = \int_{\mathcal{D}} N(\mathbf{r},\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')dV + c\,,$$

donde

$$N(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \sum_{k>0} \frac{u_k(\mathbf{r})u_k^*(\mathbf{r}')}{\lambda_k}$$

es la función de Neumann, y c una constante arbitraria, igual al valor medio $\frac{1}{V}\int_{\mathcal{D}} u(\mathbf{r})dV$.

N está definida por la ecuación

$$-\Delta N(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{1}{V}, \quad \frac{\partial N(\mathbf{r},\mathbf{r}')}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{r} \in \partial\mathcal{D}\,,$$

donde hemos sustraído a la fuente puntual su valor medio:

$$\frac{1}{V}\int_{\mathcal{D}} \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')dV = \frac{1}{V}\,,$$

de forma que $\int_{\mathcal{D}}[\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{1}{V}]dV = 0$. Notemos que

$$\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - \frac{1}{V} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - u_0(\mathbf{r})u_0^*(\mathbf{r}') = \sum_{k>0} u_k(\mathbf{r})u_k^*(\mathbf{r}')\,.$$

Resolvamos ahora el problema general (V.6.83). Utilizando (V.6.60) obtenemos

$$\lambda_k c_k = f_k + g_k, \quad g_k = \int_{\partial\mathcal{D}} u_k^*(\mathbf{r})g(\mathbf{r})dS\,,$$

donde la condición (V.6.84) implica

$$f_0 + g_0 = 0\,.$$

Por lo tanto,

$$c_k = \frac{f_k + g_k}{\lambda_k}, \quad k > 0, \quad c_0 \text{ arbitrario}\,.$$

Obtenemos, finalmente,

$$u(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int_{\mathcal{D}} N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')f(\mathbf{r}')dV + \int_{\partial\mathcal{D}} N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')g(\mathbf{r}')dS + c\,,$$

donde $c = \frac{1}{V}\int_{\mathcal{D}} u(\mathbf{r})dV$ es una constante arbitraria.

Como ejemplo directo, en el caso de un rectángulo, $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$,

$$N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{2}{ab}\sum_{n,m} \alpha_{nm}\frac{\cos(k_n x)\cos(k_n x')\cos(l_m y)\cos(l_m y')}{k_n^2 + l_m^2}\,,$$

donde $k_n = n\pi/a$, $l_m = m\pi/b$, con $n, m = 0, 1, 2, \ldots$, y $\alpha_{nm} = 2 - \delta_{n0} - \delta_{m0}$ (o sea, $\alpha_{00} = 0$, $\alpha_{0m} = \alpha_{n0} = 1$, $\alpha_{nm} = 2$ si $n > 0$, $m > 0$).

V.6.7.6. Solución para el problema general de Dirichlet

La solución del problema general de Dirichlet

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{r}}(u) &= f(\mathbf{r}),\ r \in \mathcal{D},\ \ u(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}),\ \mathbf{r} \in \partial\mathcal{D} \\ L_{\mathbf{r}}(u) &= -\Delta_{\mathbf{r}} u + q(\mathbf{r})u \end{aligned}$$

puede expresarse en términos de la función de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, definida por

$$L_{\mathbf{r}}(G) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad \mathbf{r} \in \mathcal{D}, \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0,\ \mathbf{r} \in \partial\mathcal{D}\,, \tag{V.6.87}$$

como

$$u(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{D}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')f(\mathbf{r}')dV' - \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial G}{\partial n'}g(\mathbf{r}')dS'\,, \tag{V.6.88}$$

donde n' es la dirección normal hacia exterior. Por supuesto, aquí hemos supuesto que la solución de (V.6.87) existe. La expresión (V.6.88) se puede demostrar utilizando el desarrollo en autofunciones de L con condiciones de contorno homogéneas. G vuelve a estar dada entonces por la expresión (V.6.63). Se puede llegar también a (V.6.88) directamente de (V.6.87), intercambiando $\mathbf{r}$ por $\mathbf{r}'$, multiplicando luego (V.6.87) por $u(\mathbf{r}')$ e

integrando finalmente sobre $\mathcal{D}$ respecto de $\mathbf{r}'$, utilizando el teorema de Green y la simetría $G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G(\mathbf{r}',\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) &= \int_{\mathcal{D}} \delta(\mathbf{r}'-\mathbf{r})u(\mathbf{r}')dV' = \int_{\mathcal{D}} L_{\mathbf{r}'}[G(\mathbf{r},\mathbf{r}')]u(\mathbf{r}')dV' \\ &= \int_{\partial\mathcal{D}} [-\frac{\partial G}{\partial n'}u(\mathbf{r}') + G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\frac{\partial u}{\partial n'}]dS' + \int_{\mathcal{D}} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')L_{\mathbf{r}'}[u(\mathbf{r}')]dV' \\ &= -\int_{\partial\mathcal{D}} \frac{\partial G}{\partial n'}g(\mathbf{r}')dS' + \int_{\mathcal{D}} G(\mathbf{r},\mathbf{r}')f(\mathbf{r}')dV' \end{aligned}$$

donde, en la última línea, se han utilizado la condición de contorno homogénea de G y el valor de u en el borde.

V.7. Ecuaciones hiperbólicas y parabólicas en mayores dimensiones espaciales

V.7.1. Ecuación hiperbólica en más variables. Ondas y función de Green en el espacio n-dimensional

Consideremos, ahora, la ecuación general de ondas,

$$u_{tt} - v^2\Delta u = f(\mathbf{r},t)\,, \tag{V.7.1}$$

donde Δ es el laplaciano, en una región $\mathcal{D}$ simplemente conexa de un espacio n-dimensional, con la condición de contorno

$$u(\mathbf{r},t) = g(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{r} \in \partial\mathcal{D} \tag{V.7.2}$$

y la condición inicial

$$u(\mathbf{r},0) = \phi(\mathbf{r}), \quad u_t(\mathbf{r},0) = \psi(\mathbf{r})\,. \tag{V.7.3}$$

Sean $u_k(\boldsymbol{r})$ las autofunciones normalizadas del laplaciano en dicha región con condiciones de contorno homogéneas,

$$-\Delta u_k = \lambda_k u_k, \quad u_k(\boldsymbol{r}) = 0 \text{ si } \boldsymbol{r} \in \partial\mathcal{D} \tag{V.7.4}$$

$$\int_{\mathcal{D}} u_k^*(\boldsymbol{r})u_{k'}(\boldsymbol{r})dV = \delta_{kk'}\,. \tag{V.7.5}$$

En primer lugar, mediante el método de separación de variables podemos ver que la solución general de la ecuación de ondas *homogénea* con la condición de contorno $u(\boldsymbol{r},t) = 0$ si $\boldsymbol{r} \in \partial\mathcal{D}$ (membrana elástica fija en el borde) puede expresarse en términos de las autofunciones anteriores como

$$u(\boldsymbol{r},t) = \sum_k u_k(\boldsymbol{r})[a_k \cos(v\lambda_k t) + b_k \sin(v\lambda_k t)]\,. \tag{V.7.6}$$

Problema sugerido V.7.1: Demostrar el resultado (V.7.6) utilizando separación de variables, y dar una expresión para a_k y b_k en términos de las condiciones iniciales.

Problema sugerido V.7.2: Dar la expresión explícita de (V.7.6) para i) un rectángulo de lados a, b, y ii) un disco de radio a.

En el caso general, podemos desarrollar $u(\boldsymbol{r},t)$ y $f(\boldsymbol{r},t)$ como

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{r},t) &= \sum_k c_k(t)u_k(\boldsymbol{r},t)\,, \quad c_k(t) = \int_{\mathfrak{D}} u_k^*(\boldsymbol{r})u(\boldsymbol{r},t)dV \\ f(\boldsymbol{r},t) &= \sum_k f_k(t)u_k(\boldsymbol{r}) \quad f_k(t) = \int_{\mathfrak{D}} u_k^*(\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{r},t)dV \end{aligned}$$

y efectuar una integración "por partes" tal que

$$\begin{aligned} -\int_{\mathfrak{D}} u_k^*\Delta u dV &= \int_{\partial\mathfrak{D}} u\frac{\partial u_k^*}{\partial n}dS - \int_{\mathfrak{D}} u\Delta u_k dV \\ &= g_k(t)/v^2 + \lambda_k c_k(t)\,, \end{aligned}$$

donde

$$g_k(t) = v^2 \int_{\partial\mathfrak{D}} g(\mathbf{r},t)\frac{\partial u_k^*(\mathbf{r})}{\partial n}dS.$$

Multiplicando la ecuación (V.7.1) por $u_k^*(\boldsymbol{r})$ e integrando obtenemos, entonces, la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2c_k}{dt^2} + v^2\lambda_k c_k = f_k(t) - g_k(t).$$

Empleando la expresión de la función de Green para ecuaciones diferenciales ordinarias (ver II), se encuentra

$$\begin{aligned} c_k(t) &= c_k(0)\cos(\omega_k t) + c_k'(0)\frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k} \\ &\quad + \int_0^t \frac{\sin[\omega_k(t-t')]}{\omega_k}(f_k(t') - g_k(t'))dt'\,, \end{aligned}$$

con $\omega_k = v\sqrt{\lambda_k}$ *las frecuencias propias* del sistema y

$$c_k(0) = \int_{\mathfrak{D}} u_k^*(\mathbf{r})\phi(\mathbf{r})dV, \quad c_k'(0) = \int_{\mathfrak{D}} u_k^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})dV.$$

Obtenemos, así,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r},t) &= \int_{\mathfrak{D}}\int_0^\infty G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t-t')f(\mathbf{r}',t')dV'dt' \\ &\quad + \int_{\mathfrak{D}} [G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)\psi(\mathbf{r}') + G_t(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)\phi(\mathbf{r}')]dV' \\ &\quad - v^2\int_{\partial\mathfrak{D}}\int_0^\infty \frac{\partial G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t-t')}{\partial n'}g(\mathbf{r}',t')dS'dt'\,, \end{aligned} \qquad \text{(V.7.7)}$$

con

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)=\sum_k \frac{\sin(\omega_k t)}{\omega_k}u_k(\mathbf{r})u_k^*(\mathbf{r}')H(t) \tag{V.7.8}$$

la función de Green causal de la ecuación de ondas, que satisface

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-v^2\Delta)G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t)$$

y la condición de contorno que caracteriza a nuestro problema.

$G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)$ es la amplitud en $(\mathbf{r},t)$ para un impulso puntual en $(\mathbf{r}',0)$ que se anula para $t<0$.

Por ejemplo, para una cuerda finita de longitud a con extremos fijos,

$$G(x,x',t)=\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\omega_n t)}{\omega_n}\sin(n\pi x/a)\sin(n\pi x'/a)H(t)\,, \tag{V.7.9}$$

con $\omega_n=v(n\pi/a)$.

Para una membrana circular de radio a con borde fijo,

$$G(r,r',\theta,\theta',t) \;=\; \frac{1}{\pi a^2}\sum_{n,m}\frac{\sin(\omega_{nm}t)}{\omega_{nm}}\frac{J_n(k_{nm}r/a)J_n(k_{nm}r'/a)e^{in(\theta-\theta')}}{(J_n'(k_{nm}))^2}, \tag{V.7.10}$$

donde $\omega_{nm}=vk_{nm}/a$ son las frecuencias propias y k_{nm} denota el emésimo cero de J_n ($J_n(k_{nm})=0$), con $m=1,2,\ldots$, $n=0,1,\ldots$. La *frecuencia fundamental* (la más baja) es $\omega_{01}\approx vk_{01}/a$, con $k_{01}\approx\pi 0{,}765$. Notemos que

$$\omega_{01}\approx v1{,}357\pi/\sqrt{A}\,,$$

donde $A=\pi a^2$ es el área de la membrana. Esta es la frecuencia más baja que puede obtenerse para un área dada con extremos fijos.

Problema sugerido V.7.3: Mostrar que, para una membrana cuadrada, la frecuencia fundamental es $v\sqrt{2}\pi/\sqrt{A}$.

Para una cuerda infinita, las autofunciones normalizadas son

$$u_k(x)=\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}\quad \int_{-\infty}^{\infty}u_k^*(x)u_{k'}(x)dx=\delta(k-k')$$

y, por lo tanto,

$$G(x,x',t)=\frac{H(t)}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(kvt)}{kv}e^{ik(x-x')}dk$$
$$=\;\frac{H(t)}{2v}[H(x-x'+vt)-H(x-x'-vt)]=\frac{H(vt-|x-x'|)}{2v},$$

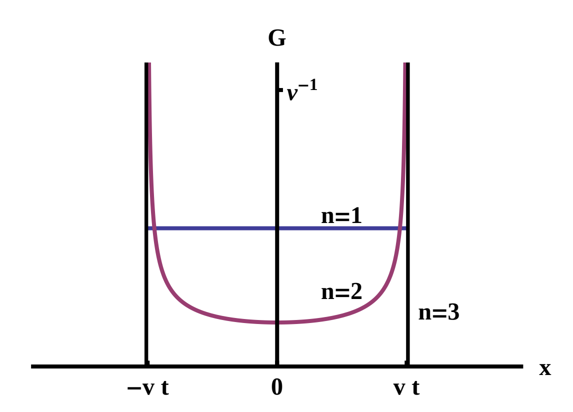


Figura 51: Esquema de la función de Green de la ecuación de ondas en una, dos y tres dimensiones.

donde la última expresión es válida para $t > 0$. Hemos tomado valor principal y recordado que la transformada de Fourier de $H(x+a) - H(x-a) = \{^{\mathrm{Sg}[a]\ \ |x|<|a|}_{0\qquad |x|>|a|}$ es

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[H(x+a) - H(x-a)]e^{-ikx}dk &= \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{-ikx}dx \\ &= \frac{e^{ika} - e^{-ika}}{2\pi ik} = \frac{\sin(ka)}{\pi k}\,.\end{aligned}$$

En el espacio tridimensional,

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) = \frac{H(t)}{(2\pi)^3}\int_{R^3}\frac{\sin(vkt)}{vk}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}d^3k\,,$$

donde $k = |\mathbf{k}|$. Pasando a coordenadas polares y definiendo $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, se obtiene

$$\begin{aligned}G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) &= \frac{H(t)}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}\frac{\sin(vkt)}{vk}k^2dk\int_0^{\pi}e^{ikr\cos\theta}\sin\theta d\theta \\ &= \frac{2H(t)}{(2\pi)^2 vr}\int_0^{\infty}\sin(kvt)\sin(kr)dk = \frac{H(t)}{8\pi^2 vr}\int_{-\infty}^{\infty}[e^{ik(r-vt)} - e^{ik(r+vt)}]dk \\ &= \frac{H(t)}{4\pi vr}[\delta(r-vt) - \delta(r+vt)] = \frac{\delta(vt-r)}{4\pi vr}\,,\end{aligned}$$

donde la última expresión es válida para $t > 0$ y representa una superficie esférica alejándose de la fuente con velocidad v y amplitud proporcional a r^{-1}. Notemos la gran diferencia con el caso unidimensional. Esta forma de la función de Green permite la transmisión limpia de pulsos en 3 dimensiones.

Problema sugerido V.7.3: Probar que, en el caso tridimensional, una solución de la ecuación de ondas que depende sólo de $r = |\boldsymbol{r}|$, debe ser de la forma

$$u(r,t) = f(r-vt)/r + g(r+vt)/r\,. \qquad \text{(v.7.11)}$$

En el caso bidimensional, se obtiene

$$
\begin{aligned}
G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) &= \frac{H(t)}{(2\pi)^2}\int_{R^2}\frac{\sin(vkt)}{vk}e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}d^2k \\
&= \frac{H(t)}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{\sin(vkt)}{vk}kdk\int_0^{2\pi}e^{ikr\cos\theta}d\theta = \frac{H(t)}{2\pi v}\int_0^\infty \sin(kvt)J_0(kr)dk \\
&= \frac{H(t)}{2\pi v}\frac{H((vt)^2-r^2)}{\sqrt{(vt)^2-r^2}}\,,
\end{aligned}
$$

resultado que puede interpretarse como “intermedio” entre los correspondientes a 1 y 3 dimensiones espaciales.

V.7.2. Difusión en el espacio n-dimensional. Función de Green de la ecuación general de difusión

Consideremos la ecuación de difusión en n dimensiones espaciales,

$$u_t - \alpha\Delta u = f(\mathbf{r},t), \quad \alpha > 0 \tag{V.7.12}$$

en una región simplemente conexa $\mathcal{D}$, con la condición de contorno

$$u(\mathbf{r},t) = g(\mathbf{r},t), \quad \mathbf{r}\in\partial\mathcal{D} \tag{V.7.13}$$

y la condición inicial

$$u(\mathbf{r},0) = \phi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r}\in\mathcal{D}. \tag{V.7.14}$$

En primer lugar, mediante el método de separación de variables, podemos ver que la solución general de la ecuación de difusión *homogénea* con la condición de contorno $u(\boldsymbol{r},t)=0$ si $\boldsymbol{r}\in\partial\mathcal{D}$ (por ejemplo, temperatura nula en el borde) puede expresarse en términos de las autofunciones y autovalores (V.7.4) como

$$u(\boldsymbol{r},t) = \sum_k c_k u_k(\boldsymbol{r})e^{-\alpha\lambda_k^2 t}\,. \tag{V.7.15}$$

Problema sugerido V.7.4: Demostrar el resultado (V.7.15) utilizando separación de variables, y dar una expresión para c_k en términos de la condición inicial.

Problema sugerido V.7.5: Dar la expresión explícita de (V.7.15) para i) un rectángulo de lados a, b, y ii) un disco de radio a.

Consideremos, ahora, el caso de la ecuación inhomogénea. Mediante el desarrollo

$$u(\mathbf{r},t) = \sum_k c_k(t)u_k(\mathbf{r}), \quad f(\mathbf{r},t) = \sum_k f_k(t)u_k(\mathbf{r}), \tag{V.7.16}$$

donde $u_k(\mathbf{r})$ son las autofunciones del laplaciano con condiciones de contorno homogéneas,

$$-\Delta u_k = \lambda_k u_k, \quad u_k(\boldsymbol{r}) = 0, \text{ si } \boldsymbol{r} \in \partial\mathcal{D}$$

y

$$c_k(t) = \int_{\mathcal{D}} u_k^*(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}, t) dV, \quad f_k(t) = \int_{\mathcal{D}} u_k^*(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, t) dV \,, \tag{V.7.17}$$

se obtiene una ecuación diferencial ordinaria para $c_k(t)$:

$$\frac{dc_k}{dt} + \alpha\lambda_k c_k = f_k(t) - g_k(t) \,,$$

donde $g_k(t) = \alpha \int_{\partial\mathcal{D}} g(\mathbf{r}, t) \frac{\partial u_k^*(\mathbf{r})}{\partial n} dS$. La solución es

$$c_k(t) = c_k(0) e^{-\alpha\lambda_k t} + \int_0^t e^{-\alpha\lambda_k(t-t')} (f_k(t') - g_k(t')) dt' \,,$$

con

$$c_k(0) = \int_{\mathcal{D}} u_k^*(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV.$$

Obtenemos, finalmente,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}, t) &= \int_{\mathcal{D}} \int_0^\infty G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') f(\mathbf{r}', t') dV' dt' \\ &\quad + \int_{\mathcal{D}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \phi(\mathbf{r}') dV' - \alpha \int_{\partial\mathcal{D}} \int_0^\infty \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t')}{\partial n'} g(\mathbf{r}', t') dS' dt', \end{aligned} \tag{V.7.18}$$

donde

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') = \sum_k e^{-\alpha\lambda_k(t-t')} u_k(\mathbf{r}) u_k^*(\mathbf{r}') H(t - t') \tag{V.7.19}$$

$$= K(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', t - t') H(t - t') \tag{V.7.20}$$

es la función de Green de la ecuación de difusión, que satisface

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \alpha\Delta) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t')$$

y la condición de contorno que caracteriza a nuestro problema. $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t')$ es la temperatura en $(\mathbf{r}, t)$ para una fuente de calor puntual en $(\mathbf{r}', t')$, siendo nula para $t < t'$.

En cambio, $K(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', t) = \sum_k e^{-\alpha\lambda_k t} u_k(\mathbf{r}) u_k^*(\mathbf{r}')$ satisface la ecuación de difusión homogénea, $K_t - \alpha\Delta K = 0$, con condición inicial $\lim_{t\to 0^+} K(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', t) = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$.

Por ejemplo, para una barra finita de longitud a,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha n^2 \pi^2 t / a^2} \sin(n\pi x/a) \sin(n\pi x'/a) H(t) \tag{V.7.21}$$

mientras que, para una barra infinita,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{H(t)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha k^2 t} e^{ik(x-x')} dk = \frac{e^{-(x-x')^2/4\alpha t}}{2\sqrt{\pi \alpha t}} H(t) \tag{V.7.22}$$

y, para el espacio tridimensional,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \frac{H(t)}{(2\pi)^3} \int_{R^3} e^{-\alpha |\mathbf{k}|^2 t} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3k = \frac{e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2/4\alpha t}}{(2\sqrt{\pi \alpha t})^3} H(t), \tag{V.7.23}$$

ya que la integral se descompone en el producto de 3 integrales similares a la del caso de una dimensión.

El caso n-dimensional es similar. La función de Green de la ecuación de difusión conserva, en consecuencia, la misma forma gaussiana en 1, 2, 3 o n dimensiones, a diferencia de la función de Green de la ecuación de ondas.

Problema sugerido V.7.6: Determinar la función de Green de la ecuación de difusión para un disco y para una esfera sólida (bola), ambos de radio a, para la condición de contorno de Dirichlet.

Problema sugerido V.7.7: Dar la forma general de la función de Green de la ecuación de difusión para condiciones de contorno de Neumann.

Para finalizar, mencionamos que la solución del problema general

$$u_t + \alpha L_{\mathbf{r}}(u) = f(\mathbf{r}, t), \quad \alpha > 0 \tag{V.7.24}$$

en una región simplemente conexa $\mathcal{D}$ con

$$L_{\mathbf{r}}(u) = -\Delta_{\mathbf{r}} u + q(\mathbf{r}) \tag{V.7.25}$$

y la condición de contorno

$$u(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r} \in \partial\mathcal{D} \tag{V.7.26}$$

y la condición inicial

$$u(\mathbf{r}, 0) = \phi(\mathbf{r}) \tag{V.7.27}$$

está dada nuevamente por la expresión (V.7.18), con G dada nuevamente por la expresión (V.7.19)–(V.7.20), con $L_{\mathbf{r}}(u_k) = \lambda_k u_k$ y $u_k(\mathbf{r}) = 0$ en $\partial\mathcal{D}$. G satisface

$$(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha L_{\mathbf{r}}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta(t - t') \tag{V.7.28}$$

con $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t - t') = 0$ para $\mathbf{r} \in \partial\mathcal{D}$ y $G = 0$ para $t < t'$. La expresión (V.7.18) para la solución general puede obtenerse mediante el desarrollo en autofunciones, o también de la ecuación (V.7.28), intercambiando $\mathbf{r}$ por $\mathbf{r}'$, multiplicando luego por $u(\mathbf{r}', t')$ e integrando respecto de $\mathbf{r}'$ y t' en $\mathcal{D}$ y $(0, \infty)$ respectivamente, aplicando el teorema de Green en $\mathbf{r}'$ y la integración por partes en t'.

Problema sugerido V.7.8: Encontrar la expresión (V.7.18) siguiendo el procedimiento que se acaba de proponer (partir de $u(\boldsymbol{r}, t) = \int dt' \int_{\mathcal{D}} dV'\, u(\boldsymbol{r}', t')\delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}, t' - t)$).

Problema sugerido V.7.9: Utilizar un procedimiento análogo al del problema **V.7.8** para derivar la función de Green (V.7.8) de la ecuación de ondas.

Capítulo VI

A modo de epílogo: Ecuaciones de la Física Matemática a partir de un Principio Variacional

En este libro hemos intentado dar una introducción a la teoría de las ecuaciones diferenciales, haciendo hincapié en aquellos aspectos que consideramos de especial interés, en una primera aproximación al estudio de los fenómenos físicos. Este objetivo nos ha conducido, inevitablemente, a presentar una diversidad de definiciones, teoremas, ecuaciones, funciones, ejemplos, etc. Al observar, retrospectivamente, este panorama variopinto, es de esperar que pueda el/la lector/a reconocer ciertos hilos conductores, que le otorguen una mirada articulada y compacta del tema. Para abonar esta idea, de síntesis y unidad, que debe, a nuestro juicio, seguir al necesario análisis de las particularidades, hemos decidido concluir este libro presentando brevemente un tema que expresa de modo singular la indisoluble unidad entre la Física y la Matemática.

Los llamados *principios variacionales* tienen una gran importancia en Física. Ya hemos considerado previamente la existencia de un problema variacional asociado con el problema de Sturm-Liouville en III.1.5. Ahora nuestro objetivo es mostrar que todas las ecuaciones diferenciales de relevancia en el contexto de problemas físicos pueden obtenerse a partir de un principio variacional. Los primeros ejemplos de gran trascendencia, en cuanto a sus aplicaciones, han sido el llamado Principio de Hamilton y la formulación lagrangiana de la Mecánica Clásica [17], que permiten obtener las ecuaciones de movimiento de Newton pero de un modo más general y flexible. Este enfoque hace posible estudiar con naturalidad sistemas mecánicos sujetos a vínculos, cuyo tratamiento resulta engorroso (cuando no imposible) en el esquema original de Newton. Pero su influencia va mucho más allá, sirviendo de marco unificado para todos los desarrollos modernos de la Física, que a partir de las teorías de la relatividad y la mecánica cuántica, han dominado el escenario desde principios del siglo XX y hasta nuestros días. Tal vez la principal razón de este protagonismo resulte ser el rol central que ocupan los principios de simetría en la Física contemporánea y el hecho de que las invariancias asociadas y sus correspondientes leyes de conservación, se manifiestan del modo más natural y elegante a través de los principios variacionales.

Resulta conveniente empezar a describir el uso de los principios variacionales considerando el caso de un sistema con un número finito de grados de libertad. Luego extenderemos la formulación para el caso en que el número de grados de libertad es infinito (sistemas continuos).

VI.1. Principio de Hamilton para sistemas con un número finito de grados de libertad: ecuaciones diferenciales ordinarias

Consideremos una partícula de masa m y posición dada por el vector $\boldsymbol{r}$. La energía cinética está dada por

$$T = \frac{1}{2}m\,(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2),$$

donde x, y, z son las componentes de $\boldsymbol{r}$ en un sistema de coordenadas cartesianas y $\dot{x}$, como es tradicional en el contexto de la mecánica analítica, denota derivación con respecto al tiempo: $\dot{x} = \frac{d}{dt}x$. Supongamos que la partícula está sometida a una fuerza conservativa $\boldsymbol{F}$. Existe entonces una función escalar $U(\boldsymbol{r}) = U(x, y, z)$, llamada energía potencial, tal que $\boldsymbol{F} = -\nabla U$.

En este punto resulta conveniente realizar un cambio en la notación: $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{x}$. Esto indica que la forma en que escribimos a las componentes del vector posición cambian del siguiente modo: $x \to x_1$, $y \to x_2$, $z \to x_3$. Con esta notación la componente i-ésima de la fuerza se relaciona con $U(x_1, x_2, x_3)$ en la forma $F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$, y la componente i-ésima de la cantidad de movimiento puede expresarse como $m\,\dot{x}_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}$. Tenemos, entonces, una nueva manera de escribir las ecuaciones que surgen de la segunda ley de Newton:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i},$$

con $i = 1, 2, 3$. El lector puede preguntarse con qué propósito reescribimos las familiares ecuaciones newtonianas del movimiento de un modo aparentemente tan artificial. Veremos en breve que, como sucede a menudo en Física, la expresión de una ecuación ya conocida en términos de nuevas magnitudes, puede conducir a nuevos desarrollos conceptuales, con consecuencias de largo aliento. En este caso, la nueva forma de las ecuaciones de movimiento implica colocar en el primer plano a cantidades que representan formas de la energía, T y U, a expensas del concepto de fuerza. Dado que T depende sólo de las componentes de la velocidad y U es función de las coordenadas y no de la velocidad, es posible escribir las ecuaciones de movimiento en términos de una única función $L(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = T(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) - U(x_1, x_2, x_3)$, denominada *lagrangiano* del sistema bajo estudio (en este caso una partícula),

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \qquad \text{(VI.1.1)}$$

con $i = 1, 2, 3$. Esta es la forma lagrangiana de las ecuaciones de movimiento. Aunque la encontramos para el caso de una partícula, se generaliza fácilmente para el caso de un sistema de partículas. Pero lo más interesante de la forma de estas ecuaciones es que sugiere la posibilidad de ser derivadas a partir de un principio variacional. Para mostrar esto, del modo más general posible, consideremos un sistema físico cualquiera cuya posición está determinada de manera unívoca por n cantidades independientes $q_1, q_2, ...q_n$ que se denominan las *coordenadas generalizadas* del sistema, que no necesariamente son cartesianas. Este número n se denomina número de *grados de libertad* del sistema. Las *velocidades generalizadas* están dadas por $\dot{q}_1, ..., \dot{q}_n$. La experiencia ha demostrado que el estado mecánico de un sistema queda completamente determinado cuando se tienen dadas, para un dado instante, sus coordenadas y velocidades. Por lo tanto, es natural caracterizar a un sistema mecánico mediante una función lagrangiana $L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$. Nótese que en este caso general consideramos la posibilidad de que L dependa explícitamente del tiempo. Supongamos que el sistema ocupa posiciones dadas en dos instantes de tiempo t_0 y t_1, y estas posiciones están determinadas por los conjuntos de valores de

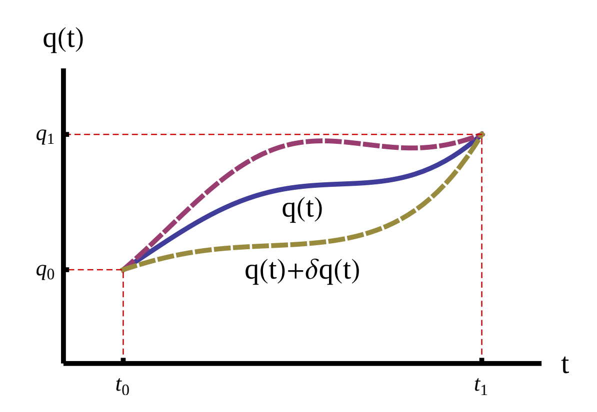


Figura 52: Esquema de $q(t)$ (curva que minimiza la acción S entre t_0 y t_1 para $q(t_0) = q_0$, $q(t_1) = q_1$) y de $q(t) + \delta q(t)$ para dos variaciones distintas $\delta q(t)$.

las coordenadas generalizadas: $q^{(0)} \equiv (q_1(t_0) = q_1^0, q_2(t_0) = q_2^0, \ldots, q_n(t_0) = q_n^0)$ y $q^{(1)} \equiv (q_1(t_1) = q_1^1, q_2(t_1) = q_2^1, \ldots, q_n(t_1) = q_n^1)$. Definimos ahora una nueva cantidad llamada la *acción* del sistema:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\, dt. \qquad \text{(VI.1.2)}$$

El *principio de mínima acción* (o principio de Hamilton) establece que el sistema se mueve entre $q^{(0)}$ y $q^{(1)}$ de manera tal que la acción S tome un valor extremo (usualmente es un mínimo, lo que justifica el nombre del principio, pero puede también ser un máximo). Notemos que, al estudiar la evolución de un sistema, en lugar de partir de las ecuaciones del movimiento, estamos partiendo del principio de Hamilton, las ecuaciones que rigen el movimiento son una incógnita que debemos obtener como consecuencia del mencionado principio. Para mostrar cómo encontrar estas ecuaciones consideremos, por simplicidad, un sistema con un solo grado de libertad, es decir que su lagrangiana es $L(q, \dot{q}, t)$. La acción es una *funcional* que depende de la función $q(t)$. Para encontrar $q(t)$ (a través de sus ecuaciones de movimiento) debemos imponer las condiciones para las cuales la acción toma un valor extremo, con las condiciones inicial y final: $q(t_0) = q^{(0)}$ y $q(t_1) = q^{(1)}$. Matemáticamente este problema corresponde al llamado cálculo variacional. Si bien una discusión rigurosa de los métodos variacionales no está dentro de los objetivos de este libro, presentaremos a continuación un modo intuitivo de resolver el problema, que sigue la línea del célebre texto de Landau y Lifshitz [17] (el lector interesado puede consultar [5]).

Supongamos que $q(t)$ es la función para la cual S alcanza su valor extremo, y, para ser más definidos supongamos también que este valor es un mínimo. Si, en lugar de $q(t)$, se considera cualquier otra función $q(t) + \delta q(t)$, siendo $\delta q(t)$ una función que permanece pequeña en el intervalo (t_0, t_1), se cumplirá que

$$\int_{t_0}^{t_1} L(q + \delta q(t), \dot{q} + \delta \dot{q}, t)\, dt - \int_{t_0}^{t_1} L(q, \dot{q}, t)\, dt \geq 0. \qquad \text{(VI.1.3)}$$

La función $\delta q(t)$ se llama *variación* de la función $q(t)$. Notemos que $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$, para que se cumplan las condiciones inicial y final del movimiento. Observemos también que el tiempo t aparece inalterado en esta expresión, lo que, en término de variaciones corresponde a la condición $\delta t = 0$. Esto significa que en todas las "trayectorias" consideradas (la real y las variadas) el sistema va evolucionando al mismo "ritmo", partiendo todas en el mismo instante de $q^{(0)}$ y llegando todas en el mismo instante a $q^{(1)}$. Por otro lado, el miembro izquierdo de (VI.1.3) es lo que cambia la acción al variar $q(t)$. Esta cantidad se llama *variación* de la acción. Un modo concreto de implementar esta variación es desarrollando $L(q+\delta q(t), \dot{q}+\delta\dot{q}, t)$ en serie de potencias de las variaciones δq y $\delta\dot{q}$. Si en este desarrollo conservamos sólo los términos de primer orden, encontramos la *primera variación* de S, que indicaremos como δS (la segunda variación se obtiene al conservar los términos de segundo orden),

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} \right) dt. \tag{VI.1.4}$$

Así como en el análisis matemático de funciones usuales, de una variable, los extremos de la función se encuentran mediante la anulación de la derivada primera, en el caso de funcionales existe un teorema que asegura que si S adquiere un valor extremo para $q(t)$, entonces se cumple (condición necesaria) que $\delta S = 0$. Igualando a cero la expresión (VI.1.4) para δS e integrando por partes el segundo término (luego de utilizar la propiedad $\delta\dot{q} = \frac{d\delta q}{dt}$) se obtiene

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \, dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q \right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

donde enseguida advertimos que el término de la derecha, que proviene de la integración por partes, se anula, ya que $\delta q = 0$ tanto en t_0 como en t_1. En los casos de interés físico las funciones $q(t)$ y $\delta q(t)$ son continuas, por lo tanto se cumplen las condiciones de validez del *lema fundamental del cálculo variacional* [5]: siendo $f(t)$ y $\delta q(t)$ continuas en el intervalo $[t_0, t_1]$, si $\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\delta q(t)\,dt = 0 \,\forall\, \delta q(t)$, entonces $f(t) = 0$. De este modo, partiendo del principio de mínima acción obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \tag{VI.1.5}$$

para un grado de libertad q. La extensión al caso general de n grados de libertad es directa. Dado que, por definición, las n coordenadas q_i son independientes, también lo son sus variaciones δq_i y el procedimiento anterior permite obtener

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \;\; i = 1, \ldots, n, \tag{VI.1.6}$$

que constituyen un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que tiene como incógnitas a las n funciones $q_i(t)$. Como sabemos, la solución general de este sistema contiene $2n$ constantes arbitrarias que se determinan especificando las condiciones iniciales, por ejemplo dando $q_i(t)$ y $\dot{q}_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ para un dado instante t_0.

VI.2. Principio variacional para sistemas continuos: ecuaciones diferenciales a derivadas parciales

Vibraciones longitudinales de una barra

Consideremos una barra sólida muy larga, formada por N partículas, todas igualmente espaciadas por una distancia a, y cada una de ellas con una misma masa m. Supongamos que cada una de estas partículas vibra longitudinalmente, y se conecta con sus vecinas mediante resortes de constante k. Este sistema se suele llamar una cadena armónica lineal. Llamaremos u_i al desplazamiento de la i-ésima partícula con respecto a su posición de equilibrio. Las energías cinética y potencial elástica de este sistema están dadas por

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m\, \dot{u_i}^2$$

y

$$U = \frac{1}{2}\sum_i k\ (u_i - u_{i-1})^2.$$

La fuerza que actúa sobre la j-ésima partícula es

$$F_j = -\frac{\partial U}{\partial u_j} = -k(u_j - u_{j-1}) + k(u_{j+1} - u_j).$$

De acuerdo a lo visto en la subsección anterior, la función lagrangiana del sistema puede escribirse en la forma

$$L = \frac{1}{2}\sum_i a\Big(\frac{m}{a}\ \dot{u_i}^2 - ka(\frac{u_i - u_{i-1}}{a})^2\Big) = \sum_i aL_i,$$

donde queda definida la cantidad L_i. Realicemos ahora el pasaje al límite continuo, que consiste en considerar $m \to 0$ y $a \to 0$, pero de modo tal que el cociente $\frac{m}{a}$ se mantiene finito. De hecho, este cociente es la densidad lineal de masa $\mu = \frac{m}{a}$. Por otro lado, la ley de Hooke establece que el alargamiento es proporcional a la tensión, lo cual conduce a $F_i = Y\frac{u_{i+1}-u_i}{a}$, donde la constante $Y = ka$ es el módulo de Young del material. Cuando pasamos de la descripción discreta del sistema, al continuo, el índice i, que identifica a una dada masa puntual, se convierte en una coordenada x. Entonces, esquemáticamente, se tiene: $i \to x$ y $u_i \to u(x)$, donde omitimos, momentáneamente, la dependencia en t, para mayor claridad. Además, en este límite,

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{a}\ \to \frac{u(x+a) - u(x)}{a}\ \to \frac{\partial u}{\partial x} = u_x,$$

y la suma sobre todas las partículas pasa a ser una integral:

$$\sum_i a\ \to \int dx,$$

mientras que la cantidad L_i, definida antes, pasa a ser la llamada *densidad lagrangiana*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\big(\mu(u_t)^2 - Y(u_x)^2\big),$$

donde, por supuesto, la función u depende tanto de x como del tiempo t. En este contexto, las funciones $u(t, x)$ así obtenidas suelen llamarse *campos*.

Destaquemos el papel que juegan x y $u(t, x)$ en esta formulación continua. Remarquemos que x *no representa una coordenada generalizada* sino una especie de índice continuo que reemplaza al índice discreto i. Así como cada valor de i correspondía a una coordenada generalizada u_i, al pasar al continuo hay una coordenada generalizada $u(t, x)$ para cada valor de x. Y, como x, al ser una variable continua, toma infinitos valores, entonces el sistema continuo puede considerarse como un sistema con infinitos grados de libertad. Esto nos guía directamente al tema central de esta sección, el de las ecuaciones de movimiento. Notemos que ahora la acción puede escribirse en términos de la densidad lagrangiana como

$$S = \int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1} \mathcal{L}(u_t, u_x)\, dt\, dx. \qquad \text{(VI.2.7)}$$

Como antes, imponemos la condición $\delta S = 0$, con las condiciones $\delta u = 0$ en los bordes (dados por $t = t_0, t_1$ y $x = x_0, x_1$), lo cual nos lleva, mediante un álgebra completamente análoga a la de la subsección anterior, a la ecuación:

$$\mu\, u_{tt} - Y\, u_{xx} = 0,$$

que coincide, en su forma, con la ecuación de onda en una dimensión discutida en V.4.1.

Notemos que en el ejemplo precedente la densidad lagrangiana es una funcional de u_t y u_x. En casos más generales, en los que hubiesen, por ejemplo, fuerzas adicionales locales, $\mathcal{L}$ podría depender también de u. También existen casos en que se tiene una dependencia explícita de t y x. Por lo tanto, una forma más abarcativa es $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u_t, u_x, u, t, x)$. El principio de mínima acción, con las condiciones usuales ($\delta u = 0$ para $t = t_0, t_1$ y $x = x_0, x_1$, $\delta t = \delta x = 0$) da lugar a

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0, \qquad \text{(VI.2.8)}$$

que es la ecuación de Lagrange para un sistema continuo en una dimensión espacial.

Un aspecto sorprendente de estos resultados es que se obtenga precisamente *una sola* ecuación de movimiento. En efecto, como vimos en la subsección anterior, un sistema con un número finito n de grados de libertad, es descripto por n ecuaciones de movimiento. A medida que n crece, también crece el número de ecuaciones. Sin embargo, para $n \to \infty$, la dinámica de todo el sistema queda determinada por una sola ecuación. Pero esta única ecuación resulta ser a derivadas parciales, mientras que las ecuaciones que se obtienen para n finito son ordinarias.

Es importante enfatizar que esta formulación continua se generaliza de un modo bastante directo en dos direcciones: cuando se deben considerar mas dimensiones espaciales,

y cuando el problema requiere la consideración de un número mayor de campos (que pueden, eventualmente, interactuar entre sí). Como ejemplo del primer caso, resulta instructivo estudiar las vibraciones transversales de una membrana elástica delgada.

Vibraciones transversales de una membrana delgada

Llamemos $u(t,x,y)$ al desplazamiento de la membrana con respecto a su posición de equilibrio, dada por $u = 0$. La membrana se extiende a lo largo de una región R cuya frontera es una curva simple C, que supondremos fija. Para obtener la ecuación de movimiento mediante el principio variacional, debemos determinar la lagrangiana del sistema. Sea $\rho = \rho(x,y)$ la masa por unidad de área de la membrana. En estas condiciones, la energa cinética del sistema está dada por

$$T = \frac{1}{2}\int\int_R \rho\, u_t^2\, dx\, dy, \tag{VI.2.9}$$

donde la integral se extiende a lo largo de R. La energía potencial se obtiene calculando el trabajo realizado por la tensión de la membrana al cambiar su área. Llamemos τ a la tensión por unidad de longitud, que supondremos constante. Al estirarse la membrana se produce un cambio en el elemento de superficie: $dx\, dy \to dA$, de modo que el incremento infinitesimal de energía potencial elástica está dada por

$$dU = \tau\,(dA - dx\, dy). \tag{VI.2.10}$$

Si $\vec{r}$ es el vector de posición de un punto sobre la membrana, su cambio infinitesimal es $d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}dy$. A su vez, los vectores $\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}dx$ y $\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}dy$ están asociados a los lados del elemento de superficie dA. Más específicamente, se cumple que

$$dA = \mid \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}dx \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}dy \mid . \tag{VI.2.11}$$

Dado que, en el sistema cartesiano que estamos utilizando se tiene $\vec{r} = x\check{i} + y\check{j} + u\check{k}$, evaluando el producto vectorial en (VI.2.11) y reemplazando en (VI.2.10), encontramos

$$dU = \tau\,(\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} - 1)dx\, dy\,. \tag{VI.2.12}$$

Ahora supondremos que las cantidades $\mid u_x \mid$ y $\mid u_y \mid$ son suficientemente pequeñas como para aproximar la raíz en la forma: $\sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \approx 1 + \frac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2)$. Entonces, integrando sobre toda la región R, se tiene

$$U = \frac{1}{2}\int\int_R \tau\,(u_x^2 + u_y^2)\, dx\, dy. \tag{VI.2.13}$$

Contando con T y U es inmediato construir la acción

$$S = \int_{t_0}^{t_1}\int\int_R \mathcal{L}(u_t, u_x, u_y)\, dt\, dx\, dy. \tag{VI.2.14}$$

Anulando la correspondiente variación, $\delta S = 0$, con las condiciones $\delta u = 0$ en los bordes, y luego de algunas integraciones por parte, hallamos la ecuación de movimiento

$$u_{tt} - \frac{\tau}{\rho}(u_{xx} + u_{yy}) = 0.$$

Esta es la ecuación de ondas bidimensional. Sus soluciones son ondas viajeras que se propagan con una velocidad $v = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}$. Por supuesto, la solución concreta requiere el conocimiento de una condición inicial, $u(t_0, x, y) = f(x, y)$, que define la forma inicial de la membrana. También se debe especificar una condición de contorno: $u(t, x, y) = g(t, x, y), \forall x, y \in C$.

Problema sugerido VI.2.1: Construir una densidad lagrangiana que permita obtener la ecuación de difusión en una dimensión espacial.

Problema sugerido VI.2.2: Obtener las ecuaciones de movimiento que obedecen los campos $u(t, x)$ y $v(t, x)$, dada la densidad lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\big(a(u_t)^2 - b(u_x)^2 + c(v_t)^2 - d(v_x)^2 - U(u, v)\big)$, donde a, b, c, d son constantes, y U es una función continua de u y v. (Generalizar apropiadamente las condiciones en los bordes).

Apéndices

Apéndice A

Diagonalización de matrices

Sean A una matriz de $n \times n$ y $\boldsymbol{v}$ un vector de $n \times 1$. Se dice que $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ es *autovector* de A si existe un número λ real o complejo tal que [21, 22]

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}\,. \tag{A.1}$$

En tal caso se dice que λ es *autovalor* de A. En estas condiciones, $(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = 0$, con $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$, por lo que la matriz $A - \lambda I$ debe ser *singular*:

$$\mathrm{Det}[A - \lambda I] = 0\,. \tag{A.2}$$

Esta ecuación, denominada *ecuación característica*, determina todos los autovalores de A. Dado que $\mathrm{Det}[A - \lambda I] = 0$ *es un polinomio de grado* n *en* λ, (A.2) tendrá a lo sumo n raíces distintas λ_k, reales o complejas.

Una vez hallados los autovalores λ_k, es decir, todas las raíces de (A.2) (tanto reales como complejas), los autovectores correspondientes $\boldsymbol{v}_k = (v_{1k}, \ldots, v_{nk})^t$ se obtienen resolviendo la ecuación (A.1), es decir, resolviendo el sistema lineal homogéneo

$$(A - \lambda_k I)\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}\,, \tag{A.3}$$

que tendrá necesariamente soluciones $\boldsymbol{v}_k$ no nulas por ser $A - \lambda_k I$ singular. Si $\boldsymbol{v}$ es autovector de $A \Rightarrow c\boldsymbol{v}$, con $c \neq 0$, es obviamente también un autovector asociado al mismo autovalor. Y si $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{v}'$ son dos autovectores con el mismo autovalor, su suma $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}'$ también lo será (si no nula). El conjunto de autovectores asociados a un dado autovalor λ_k, junto con el vector nulo $\mathbf{0}$, forma entonces un espacio vectorial, denominado *espacio propio* o *autoespacio* asociado a λ_k. Este espacio coincide con el espacio nulo de $A - \lambda_k I$ (o sea, con el conjunto solución del sistema (A.3)), y es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ (o en general $\mathbb{C}^n$, si A o λ_k es complejo).

Obviamente, los autovectores correspondientes a dos autovalores distintos son *linealmente independientes* (LI): $\boldsymbol{v}_k \neq c\boldsymbol{v}_{k'}$ si $\lambda_k \neq \lambda_{k'}$. Análogamente, se muestra por inducción que $m \geq 2$ autovectores $\boldsymbol{v}_k$ con autovalores distintos λ_k son LI: Si suponemos que $\boldsymbol{v}_m = \sum_{k=1}^{m-1} c_k \boldsymbol{v}_k \Rightarrow A\boldsymbol{v}_m = \sum_{k=1}^{m-1} c_k \lambda_k \boldsymbol{v}_k = \lambda_m \sum_{k=1}^{m-1} c_k \boldsymbol{v}_k$, es decir, $\sum_{k=1}^{m-1} c_k(\lambda_k - \lambda_n)\boldsymbol{v}_k = \mathbf{0}$, lo que es absurdo si los primeros $m-1$ $\boldsymbol{v}_k$ son LI y $\lambda_m \neq \lambda_k$

para $k = 1, \ldots, m-1$. Si una matriz tiene n autovalores distintos, tendrá entonces n autovectores LI, que formarán una base de $\mathbb{R}^n$ (o $\mathbb{C}^n$ en el caso complejo).

Si A posee n autovectores LI, podemos formar una matriz de autovectores

$$V = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \tag{A.4}$$

de $n \times n$ no singular, t.q. la k-ésima columna de V sea el autovector $\boldsymbol{v}_k$. V satisface la ecuación

$$AV = VA', \quad A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, como $\mathrm{Det}[V] \neq 0$, podemos escribir

$$A = VA'V^{-1} \quad \text{o} \quad A' = V^{-1}AV\,, \tag{A.5}$$

con A' *diagonal*. Se dice entonces que la matriz A es *diagonalizable*. Por ejemplo, si A tiene n autovalores distintos, tendrá necesariamente n autovectores LI y será por lo tanto diagonalizable. Por otro lado, A puede ser diagonalizable aun cuando tenga autovalores repetidos.

Un caso de especial interés es el de las matrices *hermíticas*, definidas por $A_{ij} = A^*_{ji}$ $\forall$ i, j, es decir,

$$A^\dagger = A\,, \tag{A.6}$$

donde $A^\dagger$ es la matriz adjunta (traspuesta-conjugada). Si A es real, A hermítica implica A simétrica. Estas matrices, que surgen frecuentemente en sistemas físicos, son *siempre diagonalizables*, aun si el número de autovalores distintos es menor que n. Más aún, sus autovalores son siempre *reales*, y los autovectores correspondientes a autovalores distintos son *ortogonales* con respecto al producto escalar usual:

$$\boldsymbol{v}^*_k \cdot \boldsymbol{v}_{k'} = \sum_i v^*_{ik} v_{ik'} = 0 \;\; \text{si} \;\; \lambda_k \neq \lambda_{k'}\,.$$

En efecto, si

$$A\boldsymbol{v}_k = \lambda_k \boldsymbol{v}_k, \quad A\boldsymbol{v}_{k'} = \lambda_{k'} \boldsymbol{v}_{k'}\,, \tag{A.7}$$

multiplicando la primera ecuación a izquierda por el vector fila $\boldsymbol{v}^\dagger_k$ obtenemos

$$\boldsymbol{v}^\dagger_k A \boldsymbol{v}_k = \lambda_k (\boldsymbol{v}^*_k \cdot \boldsymbol{v}_k)\,,$$

dado que $\boldsymbol{v}^\dagger_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}^*_k \cdot \boldsymbol{v}_k$. Si A es hermítica, $\boldsymbol{v}^\dagger_k A \boldsymbol{v}_k = \sum_{i,j} v^*_{ik} A_{ij} v_{jk}$ es *real*, y también es real $\boldsymbol{v}^*_k \cdot \boldsymbol{v}_k = \sum_i |v^2_{ik}|$, por lo que λ_k *debe ser real*. Ahora, tomando el traspuesto conjugado de la primera ecuación en (A.7), tenemos

$$\boldsymbol{v}^\dagger_k A = \lambda_k \boldsymbol{v}^\dagger_k\,,$$

donde hemos tenido en cuenta que $A^\dagger = A$ y $\lambda_k^* = \lambda_k$. Multiplicando la ecuación anterior a la derecha por el vector columna $\boldsymbol{v}_{k'}$ y la segunda ecuación en (A.7) a la izquierda por el vector fila $\boldsymbol{v}_k^\dagger$ y restando, obtenemos

$$0 = (\lambda_k - \lambda_{k'})(\boldsymbol{v}_k^* \cdot \boldsymbol{v}_{k'})\,,$$

de donde $\boldsymbol{v}_k^* \cdot \boldsymbol{v}_{k'} = 0$ si $\lambda_k \neq \lambda_{k'}$. Los autovectores correspondientes a autovalores iguales pueden también elegirse ortogonales, por lo que en el caso de matrices hermíticas, existe un conjunto *completo* (base) de autovectores normalizados ($\boldsymbol{v}_k^* \cdot \boldsymbol{v}_k = 1$) tal que

$$\boldsymbol{v}_k^* \cdot \boldsymbol{v}_{k'} = \delta_{kk'}\,,$$

en cuyo caso la matriz V resulta *unitaria*: $V^{-1} = V^\dagger$.

Las matrices *antihermíticas* ($A^\dagger = -A$) son también siempre diagonalizables y poseen un conjunto completo de autovectores ortogonales, pero sus autovalores son imaginarios ($\lambda_k = i|\lambda_k|$). Esto es inmediato ya que si $A^\dagger = -A$, la matriz $B = iA$ es hermítica ($B^\dagger = -iA^\dagger = B$) y por lo tanto diagonalizable. $A = -iB$ es entonces diagonalizable, con $A\boldsymbol{v}_k = -i\lambda_k \boldsymbol{v}_k$ si $B\boldsymbol{v}_k = \lambda_k \boldsymbol{v}_k$.

Las matrices unitarias ($A^\dagger = A^{-1}$) son asimismo siempre diagonalizables y poseen un conjunto completo de autovectores *ortogonales*, pues pueden escribirse siempre como $\exp[iB]$, con B hermítica. Sus autovalores pueden ser reales o complejos, pero tienen módulo 1 ($|\lambda_k| = 1\ \forall\ k$). En general, una matriz A será diagonalizable con autovectores ortogonales si y sólo si satisface $AA^\dagger = A^\dagger A$, o sea,

$$[A, A^\dagger] = 0\,. \tag{A.8}$$

Tales matrices (denominadas normales) incluyen en particular las hermíticas ($A^\dagger = A$), las antihermíticas ($A^\dagger = -A$) y las unitarias ($A^\dagger = A^{-1}$).

Por supuesto, una matriz A puede ser diagonalizable aun sin ser normal, pero en tal caso los autovectores no serán todos ortogonales. Para que sea diagonalizable, la multiplicidad de cada raiz de (A.2) debe ser igual a la dimensión del espacio propio correspondiente. Por consiguiente, las matrices no diagonalizables deben tener necesariamente al menos un autovalor repetido λ_k, tal que la dimensión del espacio propio asociado sea menor que la multiplicidad de λ_k como raíz de (A.2) [21, 22].

Apéndice B

Identidades de Green

Empecemos por recordar el teorema de la divergencia en n dimensiones (para la demostración ver, por ejemplo, [20]):

Teorema VI.0.1 (Gauss-Ostrogradski) *Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ una región acotada, con borde $\partial\mathcal{D}$, que admite derivadas primeras continuas a trozos. Sea $\mathbf{n}$ el vector normal exterior sobre $\partial\mathcal{D}$. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial que admite derivadas primeras continuas ($\mathbf{F} \in \mathcal{C}^1$) en $\bar{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$. Entonces,*

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \,, \tag{B.1}$$

donde dV es el elemento de volumen en $\mathcal{D}$ y dS es el elemento de superficie en $\partial\mathcal{D}$.

Ahora, integrando la identidad

$$\nabla \cdot (v\nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v\triangle u$$

sobre $\mathcal{D}$ y aplicando el teorema anterior obtenemos, para $u\,,v \in \mathcal{C}^2$, obtenemos

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla v \cdot \nabla u \, dV + \int_{\mathcal{D}} v\triangle u \, dV = \int_{\partial\mathcal{D}} v\frac{\partial u}{\partial n} \, dS \,, \tag{B.2}$$

donde $\frac{\partial u}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla u$ es la derivada direccional en dirección normal exterior. Esta es la llamada **Primera Identidad de Green**.

Intercambiando u y v en esta identidad y sustrayendo ambas identidades se obtiene la llamada **Segunda Identidad de Green**:

$$\int_{\mathcal{D}} (u\triangle v - v\triangle u) \, dV = \int_{\partial\mathcal{D}} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}) \, dS \,. \tag{B.3}$$

Apéndice C

Algunos desarrollos de la Función de Green en autofunciones

Examinaremos aquí la evaluación de algunos desarrollos en autofunciones de la función de Green obtenidos de la expresión general (V.6.63). Habíamos visto que en una dimensión la función de Green del operador de Sturm-Liouville $L[u] = -(p(x)u')' + q(x)u$ en el intervalo $[0, a]$, con la condición de contorno $G(0, x') = G(a, x') = 0$, es

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{u_1(x)u_2(x')}{w}, & x < x' \\ \frac{u_1(x')u_2(x)}{w}, & x' < x \end{cases} \quad w = -p(u_1u_2' - u_1'u_2), \tag{C.1}$$

donde $L[u_1] = L[u_2] = 0$, con $u_1(0) = u_2(a) = 0$, en cuyo caso w es constante. Notemos que $G(x, x') = G(x', x)$. Por otro lado, la expresión (V.6.63) conduce a

$$G(x, x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)u_n(x')}{\lambda_n} \tag{C.2}$$

donde $L[u_n] = \lambda_n u_n$, $u_n \neq 0$, y hemos asumido u_n real. La primera expresión representa entonces la suma de esta serie.

Por ejemplo, la función de Green para el operador $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ en el intervalo $[0, a]$ es

$$G(x, x') = \begin{cases} x(a - x')/a, & 0 < x < x' < a \\ x'(a - x)/a, & 0 < x' < x < a \end{cases} \tag{C.3}$$

Por otro lado, el desarrollo en autofunciones (C.2) conduce a

$$G(x, x') = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x/a)\sin(n\pi x'/a)}{(n\pi/a)^2},$$

de modo que para $0 < x < x' < a$,

$$\frac{x(a - x')}{a} = \frac{2a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x/a)\sin(n\pi x'/a)}{n^2}, \tag{C.4}$$

lo que puede verificarse directamente efectuando el desarrollo en serie de Fourier de (C.3).

Para el operador $L = -\frac{d^2}{dx^2} + k^2$ obtenemos

$$G(x,x') = \begin{cases} \frac{\sinh(kx)\sinh(k(a-x'))}{k\sinh(ka)}, & 0 < x < x' < a \\ \frac{\sinh(kx')\sinh(k(a-x))}{k\sinh(ka)}, & 0 < x' < x < a \end{cases}, \tag{C.5}$$

mientras que el desarrollo (C.2) conduce a

$$G(x,x') = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x/a)\sin(n\pi x'/a)}{k^2+(n\pi/a)^2},$$

de modo que para $0 < x < x' < a$,

$$\frac{\sinh(kx)\sinh(k(a-x'))}{k\sinh(ka)} = \frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi x/a)\sin(n\pi x'/a)}{k^2+(n\pi/a)^2}, \tag{C.6}$$

lo que puede también verificarse mediante el desarrollo en serie de Fourier de (C.5). Para $k \to 0$,

$$\frac{\sinh(kx)\sinh(k(a-x'))}{k\sinh(ka)} \to \frac{kx(k(a-x'))}{k^2 a} = x(a-x')/a,$$

recuperándose el resultado (C.4).

Finalmente, para el círculo $r < a$, recordando el resultado (V.6.80) obtenemos la identidad

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') &= \frac{-1}{2\pi}\ln\frac{da}{d'r'} \\ &= \frac{1}{\pi a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_n(k_{nm}r/a)J_n(k_{nm}r'/a)e^{in(\theta-\theta')}}{k_{nm}^2(J_n'(k_{nm}))^2}, \end{aligned} \tag{C.7}$$

donde k_{nm} son los ceros de la función de Bessel, $J_n(k_{nm}) = 0$ y, en coordenadas polares, $\mathbf{r} = (r,\theta)$, $\mathbf{r}' = (r',\theta')$, con d la distancia de $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}'$ y d' la de $\mathbf{r}$ a $\mathbf{r}'' = \frac{a^2}{r'^2}\mathbf{r}'$.

Bibliografía

[1] C.G. Bollini, *Apuntes de Matemáticas Especiales II*, Universidad Nacional de La Plata, inédito.

[2] J. Hadamard, *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*, Princeton Univ. Bulletin 13, 49-52 (1902); J. Hadamard, *La théorie des équations aux dérivées partielles*, Editions Scientifiques (1964).

[3] E.A. Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Dover Publications Inc.,New York (1961).

[4] E.A. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, Tata McGraw-Hill Publishing, New Delhi (1987).

[5] L. Elsgoltz, *Ecuaciones diferenciales y cálculo variacional*, Ed. MIR, Moscú (1969).

[6] N. Piskunov, *Cálculo diferencial e integral*, Tomo II, Ed. MIR, Moscú (1969).

[7] J.W. Brown, R.V. Churchill, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, McGraw-Hill Inc., New York (1993).

[8] A. Tijonov, A. Samarsky, *Ecuaciones de la Física Matemática*, MIR, Moscú (1972).

[9] G. Duff, D. Naylor, *Differential Equations of Applied Mathematics*, Ed. John Wiley & Sons, New York (1966).

[10] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Interscience Publishers, New York (1953).

[11] *Mathematica 9*, Wolfram Research Inc., Champaign, IL (2012).

[12] I.M. Gelfand, G.E. Shilov, *Generalized Functions*, Vol. I–III, Academic Press, New York & London (1977).

[13] H. Falomir, *Notas del curso de Métodos de la Física Matemática*, http://www.fismat.fisica.unlp.edu.ar/falomir/metodos.html

[14] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Ed. Dover Inc., New York (1972).

[15] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Ed. Academic Press, San Diego (2000).

[16] A. Erdélyi, *Higher Transcendental Functions* (The Bateman Manuscript Project), Ed. McGraw-Hill Inc., New York (1955).

[17] H. Goldstein, *Mecánica Clásica*, Ed. Reverté, Barcelona (2006).
L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Curso de Física Teórica*, Vol. 1, Mecánica, Ed. Reverté, Barcelona (1975).

[18] T.B. Greenslade Jr., Am. J. Phys. 57, 275 (1989).

[19] J.D. Jackson, *Electrodinámica Clásica*, Segunda Edición, Alhambra, Barcelona (1980); J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd Edition, John Wiley, New York (1998).
D.J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3rd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey (1999).

[20] T. Apostol, *Calculus*, Volumen II, Segunda Edición, Ed. Reverté, Barcelona (2001).

[21] K. Hoffman, R. Kunze, *Linear Algebra*, Ed. Prentice-Hall Inc., New Jersey (1971).

[22] G.E. Shilov, *Linear Algebra*, Ed. Dover Pub. Inc., New York (1977).

LOS AUTORES

Carlos María Naón
Dr. en Física (UNLP)
Profesor Titular
Universidad Nacional de La Plata
Investigador Principal CONICET

Raúl Dante Rossignoli
Dr. en Física (UNLP)
Profesor Titular
Universidad Nacional de La Plata
Investigador Independiente CIC

Eve Mariel Santangelo
Dra. en Física (UNLP)
Profesora Asociada
Universidad Nacional de La Plata
Investigadora Independiente CONICET